Pädagogische Schulentwicklung im Mathematikunterricht

Wege zur Umsetzung des Konzepts von H. Klippert

Ein Beitrag zum BLK-Programm

„Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“

vom

Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Bayreuth

Volker Ulm

Gliederung

4. Kommunikationstraining

4.1 Nachdenken über Kommunikation

4.2 Förderung freien Sprechens

Impulsbild
Begriffsassoziationen
Hausaufgabenfolie
Kurzberichte, Referate

4.3 Förderung gemeinschaftlichen Kommunizierens

Offenheit im Unterrichtsgespräch
Aufgaben mit vielfältigen Zugangsweisen
Meinungsmarkt
Knobelaufgaben

5. Teamentwicklung

5.1 Warum Teamentwicklung?

5.2 Teamarbeit im Klassenverband

Regelkatalog für Teamverhalten
Kooperation im Unterrichtsgespräch
Kooperatives Lernen aus Fehlern

5.3 Felder für Partner- und Gruppenarbeit

Wechselseitige Beratung und Kontrolle
Mathematisch diffizile Aufgaben
Kooperative Präsentationen
Umfangreiche Problemstellungen
Projekt- und Produktionsaufgaben

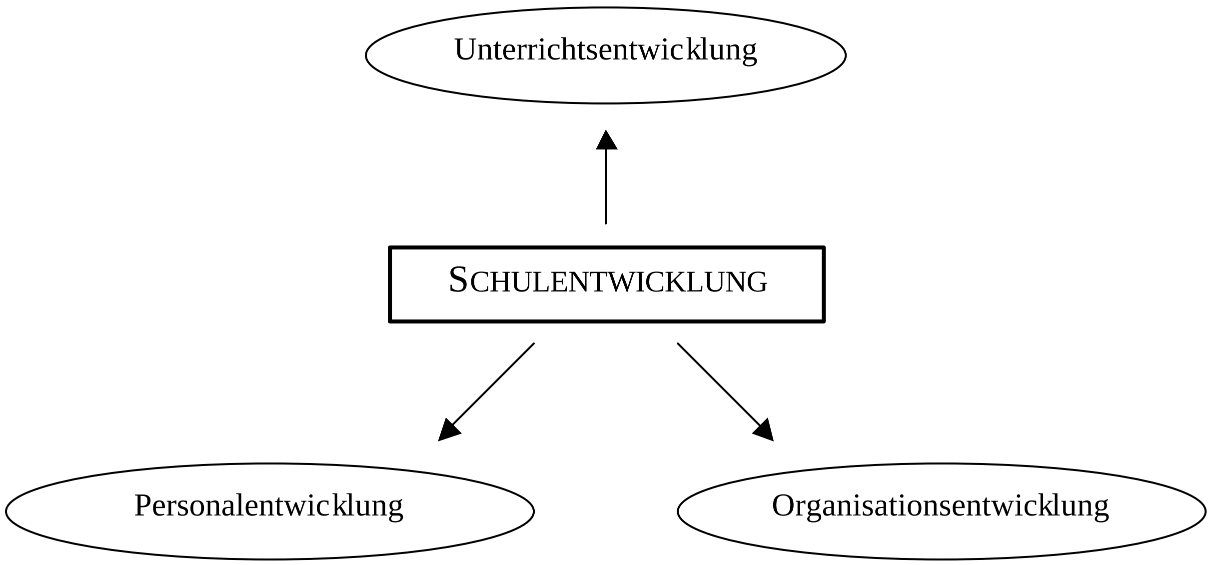
1. Das Konzept der Pädagogischen Schulentwicklung

„Innere Schulentwicklung“ ist eines der zentralen Schlagworte in der aktuellen Bildungsdiskussion. Es ist ein Megathema, wenn es um die Frage geht, wie Schule auch in Zukunft ihren Aufgaben gerecht werden kann.

Mit diesen Worten begrüßt das Bayerische Staatsministerium für Unterricht und Kultus die Besucher seiner Internetseiten zum Thema Schulentwicklung.

Warum Schulentwicklung?
Das bundesdeutsche Schulwesen galt jahrzehntelang als leistungsstark und vorbildlich. Allerdings hat dieses Bild in jüngster Zeit einige Kratzer abbekommen.
Deutsche Schüler schneiden bei internationalen Vergleichsstudien (TIMSS, PISA,...) oder landesweiten Leistungstests nur mittelmäßig ab, Universitäten beklagen mangelnde Fähigkeiten ihrer Studenten, Wirtschaftsunternehmen fordern von der Schule verstärkt die Vermittlung von Schlüsselqualifikationen, Schüler fühlen sich durch die Inhalte und Methoden des Unterrichts immer weniger angesprochen und reagieren mit Passivität, Ablehnung und Ignoranz und Lehrer resignieren angesichts unbefriedigender Unterrichtsergebnisse und einer zunehmenden persönlichen Belastung.
Schulentwicklung sucht nach Wegen, wie das gesamte Schulleben mit seinen vielgestaltigen Facetten, dem Lernen und Arbeiten im Unterricht, der Zusammenarbeit im Lehrerteam, der Schulorganisation, der Einbeziehung der Eltern und der Darstellung der Schule nach außen, wirkungsvoller und effizienter gestaltet werden kann, damit die Schule ihrem umfassenden Bildungs- und Erziehungsanspruch gerecht werden kann.
Dabei drückt der Begriff der „inneren Schulentwicklung“ aus, dass die Entwicklung nicht „von oben“ verordnet wird, sondern dass sich jede Schule von innen heraus ihren eigenen, individuellen Weg suchen muss, dass auf Eigeninitiative, Engagement, Eigenverantwortung und Kooperation gesetzt wird.

Zielfelder der inneren Schulentwicklung
Die Ansätze zur inneren Schulentwicklung lassen sich drei Zielfeldern zuordnen:



- Unterrichtsentwicklung zielt auf eine Weiterentwicklung des Unterrichts in didaktisch-methodischer Hinsicht ab und legt dabei insbesondere auf eigenverantwortliches, selbstorganisiertes und kooperatives Arbeiten Wert.
  Schülerzentrierte Unterrichtsformen und fächerübergreifende Bezüge sollen die Nachhaltigkeit der Lernprozesse fördern.

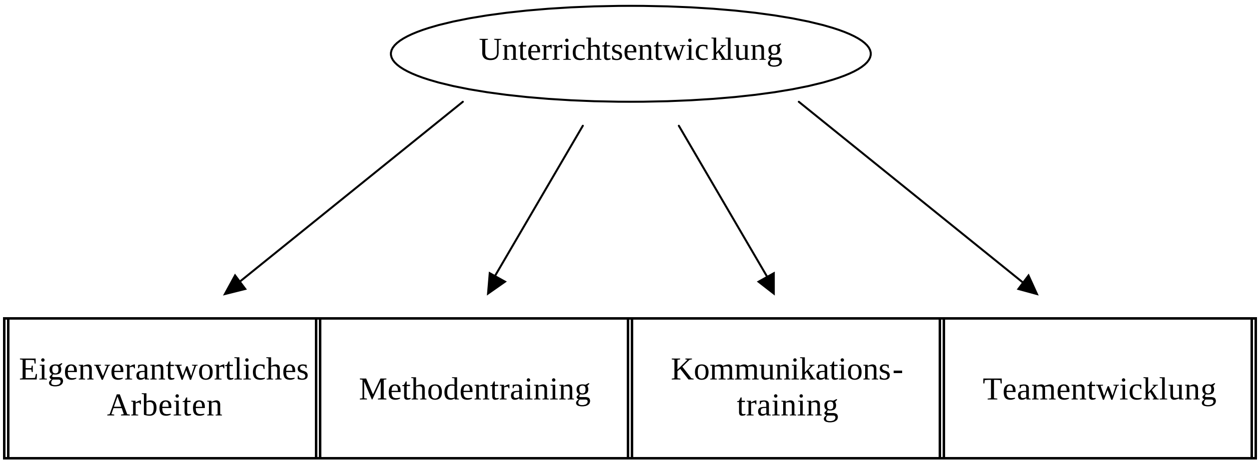
- Personalentwicklung rückt die Aus- und Weiterbildung der Lehrkräfte sowie die Kommunikation und Kooperation im Kollegium in den Mittelpunkt. Nur so können die Lehrer die sich ständig wandelnden Anforderungen effizient bewältigen.

- Organisationsentwicklung befasst sich mit bürokratischen Abläufen und der Organisation der Schulbetriebs. Zudem zielt sie auf eine zunehmende organisatorische Beteiligung von Eltern und Schülern, eine Intensivierung der Außenbeziehungen der Schule sowie eine Professionalisierung des Managements ab. Dadurch sollen auch das Schulklima verbessert und ein Schulprofil entwickelt bzw. geschärft werden.

Bisherige Schulentwicklungsprogramme haben gezeigt, dass es ratsam und lohnenswert ist, die unterrichtsbezogenen Aktivitäten ins Zentrum zu stellen (vgl. Klippert 2000, S. 12f). Damit reduziert sich das Innovationsfeld auf einen für jede einzelne Lehrkraft überschaubaren, praxisrelevanten Bereich. Schließlich ist der Unterricht das Kerngeschäft des Lehrers und der Ort, an dem letztendlich schulische Qualität produziert und verbessert werden soll. Zudem sind im Zuge der Unterrichtsentwicklung relativ schnell Erfolgserlebnisse und Entlastungsperspektiven spürbar und vorzeigbar. Dies erhöht die Akzeptanz in den Lehrerkollegien und reduziert damit die Gefahr des Scheiterns. Dagegen sind Personal- und Organisationsentwicklung für die Lehrerschaft recht zeit- und arbeitsaufwendig, ohne dass kurzfristig positive Rückkopplungen oder vorzeigbare Unterrichtserfolge zu erwarten sind.
Deshalb wird im Rahmen dieses Artikels unter *Pädagogischer Schulentwicklung* der Begriff der Unterrichtsentwicklung im obigen Sinn mitsamt seinen vielfältigen Facetten verstanden.

Die Säulen der Pädagogischen Schulentwicklung

H. Klippert stellt in zahlreichen Veröffentlichungen (siehe Literaturverzeichnis) ein detailliertes und vielfach praxiserprobtes Konzept der Pädagogischen Schulentwicklung vor. Es setzt direkt beim Lernen und Arbeiten im Unterricht an und beruht auf vier Säulen:



Diese Säulen sind dabei nicht als isolierte Handlungsfelder zu betrachten, sondern eher Schwerpunktsetzungen, die in der konkreten Unterrichtspraxis eng miteinander verwoben sind.
Das Klippert'sche Schulentwicklungsprogramm ist sehr umfassend und umfangreich: Es sieht zu jeder der obigen Säulen gezielte Trainingswochen auf Klassenebene, themenbezogene Projekttage, systematische Lehrerfortbildung, pädagogische Fachkonferenzen, schulinterne Evaluation und regelmäßige Eltern- und Öffentlichkeitsarbeit vor.
Eine Schule, die das detaillierte Konzept von Klippert in seiner Gesamtheit aufgreift und konsequent realisiert, wird sich als Ganzes voll einbringen und umorganisieren müssen. Dies erscheint durchaus sinnvoll und wünschenswert, denn alle Aktivitäten sollen ja letztendlich zu einer nachhaltigen Verbesserung der Lern- und Arbeitssituation im Unterricht, zum Aufbau weitreichender Kompetenzen auf Schülerseite und damit zu einer Entlastung der Lehrer führen.
Allerdings wird sich bundesweit wohl prozentual nur einer geringer Anteil aller Schulen auf das Programm von Klippert in seinem vollen Ausmaß einlassen. Dennoch erscheinen auch kleine Schritte und die Realisation von Teilaspekten gerechtfertigt und lohnenswert, wenn es darum geht, schulisches Lernen und Arbeiten fortzuentwickeln.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Wege aufzuzeigen, wie die Ideen von Klippert zur Pädagogischen Schulentwicklung in den alltäglichen Mathematikunterricht Eingang finden können, wie traditioneller Unterricht durch bewussten Einsatz „neuer“ Methoden bereichert werden kann, um für Schüler und Lehrer abwechslungsreicher, effizienter und letztlich gewinnbringender zu werden.

Bei allem Aktivismus zur Schulentwicklung sollte man allerdings einen Grundsatz nicht aus den Augen verlieren, wie in H. Meyer in [Meyer 1997, S.49] formuliert hat:

> *„Schulentwicklung ist kein Selbstzweck. Ihre einzige Legitimation liegt darin, das Lehren, Lernen und Leben in der Schule humaner und erfolgreicher zu machen.“*

2. Eigenverantwortliches Arbeiten

Das Schlagwort „EVA“ löst in Lehrerkollegien die unterschiedlichsten Reaktionen aus: Euphorie, Zustimmung und Interesse, aber auch Reserviertheit, Skepsis und Ablehnung. Einige Lehrkräfte sehen im Kürzel EVA die Essenz ihres pädagogischen Auftrags, andere verbinden es mit Spielerei und „weichem“ Mathematikunterricht, bei dem die fachliche Tiefe auf der Strecke bleibt.
Nun möchte ich hier nicht polarisieren, ganz im Gegenteil! Mein Ziel ist, ein Plädoyer dafür abzugeben, dass EVA ein notwendiger, integraler Bestandteil eines ausgewogenen und effizienten Mathematikunterrichts sein muss.
Gleichzeitig möchte ich anhand zahlreicher Beispiele aufzeigen, wie eigenverantwortliches Arbeiten der Schüler im konkreten Unterrichtsalltag realisiert werden kann, und zwar in so vielfältiger Art und Weise, dass auch die unterschiedlichsten Lehrerpersönlichkeiten mit ihren individuellen Unterrichtsstilen hier Anregungen finden können, um EVA in *ihren* Unterricht bewusster und evtl. intensiver zu integrieren.
Insbesondere möchte ich deutlich machen, dass EVA nicht nur in methodischen Hochformen wie Projektunterricht oder Stationenarbeit praktiziert werden kann, sondern dass eigenverantwortliches Arbeiten auch und besonders im Kleinen, in unscheinbaren Alltagssituationen seinen Platz finden muss.

2.1 Warum EVA?

Voraussetzung für lebenslanges Lernen
Das Wissen, das die Schule vermittelt, reicht inhaltlich sicher nicht aus, um in unserer Berufswelt erfolgreich zu sein. Die Schule kann nur ein Orientierungswissen und – nicht weniger wichtig – die Voraussetzungen für erfolgreiches Weiterlernen vermitteln. Diese Voraussetzungen sind motivationaler und kognitiver Art.
In der Schule und damit im Fachkontext müssen die Schüler die Bereitschaft und die Fähigkeit zu selbständigem, eigenverantwortlichem Lernen entwickeln. Dazu muss man ihnen aber auch den notwendigen Freiraum geben. Ein stark lehrerzentrierter Unterricht entlastet die Schüler zu einem gewissen Grad von der Verantwortung für das eigene Lernen. Gleichzeitig führt er auf Schülerseite aber auch zu Bequemlichkeit und Trägheit (denn der Lehrer macht ja alles) sowie zu Unselbständigkeit und Hilflosigkeit bei ungewohnten oder größeren Problemen. („Das haben wir noch nicht gemacht!“, „Kann ich nicht!“)
Deshalb sind Unterrichtsformen notwendig, die dem Schüler schrittweise eine erhöhte Verantwortung zuweisen und ihm eine stärkere Selbstorganisation abverlangen. Sukzessive müssen die Schüler die Bereitschaft erlernen, Herausforderungen anzunehmen und eigenständig anzupacken.

Aktiver Wissenserwerb

> *„Sage es mir, und ich vergesse es;*
> *Zeige es mir, und ich erinnere mich;*
> *Lass es mich tun, und ich behalte es.“* (Konfuzius)

Eine einfache, aber leider oft wenig berücksichtigte Weisheit: Lernstoff bleibt intensiver und langfristiger im Gedächtnis haften, wenn er eigenständig, aktiv-produktiv erarbeitet wurde.

Es wird vielfach beklagt und durch aktuelle Leistungsstudien nachgewiesen, dass die Schüler – gerade in Mathematik – im Allgemeinen nur über ein geringes Basiswissen und über unzureichend ausgeprägte Grundfertigkeiten verfügen. Das Lernen bleibt oft oberflächlich und beschränkt sich weitgehend auf das Einprägen von Fakten und das Trainieren von Routinen. Es gelingt momentan nicht in zufrieden stellendem Maße, bei den Schülern in den vielen Jahren Mathematikunterricht ein solides, gut vernetztes Wissensfundament aufzubauen, das in vielfältigen Situationen flexibel nutzbar und erweiterbar ist.
EVA ist ein Ansatz um derartigen Fehlentwicklungen entgegenzuwirken. Wenn Schüler durch geeignete Lernarrangements dazu geführt werden, Zusammenhänge selbständig und eigenverantwortlich zu durchdringen und zu erschließen, sie dabei aktiv Bezüge zu ihrer bisherigen Wissensbasis herstellen und sie dadurch die Ergebnisse ihrer Arbeit und den Erfolg ihres Handelns sich selbst zuschreiben, so stellen sie in solch einem Lernprozess einen derart intensiven (auch affektiven) Bezug zu den Lerngegenständen her, dass sie das Gelernte nicht nur fest in ihren bisherigen Wissensschatz integrieren können, sondern auch darauf aufbauen und in Transfersituationen variabel anwenden können. Selbst erarbeitete Resultate machen aber auch stolz auf die eigene Leistung, geben Selbstsicherheit bei neuen Problemen und stellen eine unverzichtbare Motivationsgrundlage für weiteres Arbeiten dar. Demzufolge erscheint eigenständig erworbenes Wissen um ein Vielfaches wertvoller als vom Lehrer übernommene, wenig selbstreflektierte Fakten. Gerade ein Mathematikunterricht, der auf Problemlösefähigkeit, ein gut organisiertes Grundwissen und flexible Anwendbarkeit des Gelernten Wert legt, kann derartige Ziele nur erreichen, wenn er die Schüler nicht zu passiven Rezipienten degradiert, sondern sie aktiv, selbstorganisiert und eigenverantwortlich gestalten lässt.

Förderung von Schlüsselkompetenzen

„Denken lernt man nicht
an Regeln zum Denken,
sondern an Inhalten zum Denken."

Es ist gegenwärtig „in", in der Öffentlichkeit darauf hinzuweisen, dass in unserer modernen, schnelllebigen Gesellschaft und der sich rasant weiterentwickelnden Berufswelt die Schule doch bitte nicht so viel Wert auf veraltete Inhalte legen sollte. Viel wichtiger für Erfolg im Leben seien Schlüsselqualifikationen wie Kreativität, Flexibilität, Team- und Kommunikationsfähigkeit, Selbständigkeit und Verantwortungsbereitschaft. Insbesondere von Seiten der Wirtschaft wird dies vermehrt gefordert.
Ich denke beides – die Vermittlung traditioneller Inhalte wie die Förderung von Schlüsselqualifikationen – schließt sich nicht aus, sondern bedingt sich sogar gegenseitig.
Schlüsselqualifikationen sind Befähigungen hoher Reichweite, die aber ohne ein solides Orientierungswissen und inhaltliche Fachkompetenz leer und wertlos erscheinen. Zudem können sie nicht abstrakt vermittelt, sondern nur bei der konkreten Arbeit an spezifischen Inhalten erworben werden. (Natürlich bleiben Transferwirkungen nicht aus!)
Umgekehrt erfolgt inhaltliches Lernen umso effektiver und dauerhafter, je mehr beim Lernen auf Selbständigkeit, Eigenverantwortung, Kommunikation und Kooperation, also auf Schlüsselkompetenzen Wert gelegt wird.
EVA ist also ein Weg, der zu beidem führen soll: Zu einem fundierten, vernetzten und flexibel anwendbaren Wissensschatz, wie auch zu den nötigen Kompetenzen, um dieses Wissen gewinnbringend nutzen und lebenslang erweitern zu können.

Entlastungschancen für Lehrkräfte

In dem Maß wie die Selbständigkeit und die Eigenverantwortlichkeit der Schüler wachsen, reduzieren sich auf Lehrerseite zwangsläufig die erdrückende Last an allseitiger Verantwortlichkeit sowie die damit verbundene physische und psychische Anstrengung. Lehrkräfte, die sich – vielleicht aus einem klassischen Rollenverständnis heraus – für alle Arbeitsprozesse und Lernerfolge innerhalb der Klasse verantwortlich fühlen (und damit von Seiten der Schüler und Eltern verständlicherweise auch verantwortlich gemacht werden), setzen sich in einer Zeit, in der die Schülerschaft immer heterogener wird, leicht der Gefahr aus, die Grenzen ihrer Belastbarkeit zu überschreiten. Gefühle des Versagens, Resignation oder andere Burn-out-Syndrome sind Folgen, die nicht zuletzt zu einem ausgesprochen hohen Anteil an vorzeitigen Ruhestandsversetzungen innerhalb der Lehrerschaft führen.

EVA schafft also nicht nur Freiräume für Schüler, sondern merklich auch für Lehrer. Wenn in einer Klasse eigenverantwortlich, selbstorganisiert und kooperativ gearbeitet wird, ist dies zwangsläufig eine spürbare Entlastung für den Lehrer, der dann eben nicht mehr 30 Schüler gleichzeitig „beschulen“ muss, sondern sich phasenweise zurückziehen oder mit einzelnen Schülergruppen in ein entspanntes Gespräch kommen kann.

2.2 Schaffen von Arbeitsinseln

Das Aktivitätsspektrum für eigenverantwortliches Arbeiten im Schulalltag ist vielfältig. Es kommt nicht in erster Linie darauf an, etwa möglichst viele Unterrichtsprojekte oder Lernzirkel durchzuführen. Diese Großformen von EVA werden angesichts der schulischen Rahmenbedingungen wohl kaum den Hauptteil der Unterrichtsarbeit ausmachen. Zudem setzen sie bei den Schülern bereits ein gerüttelt Maß an Selbststeuerungs- und Methodenkompetenz voraus, das erst im Kleinen erarbeitet werden muss.

Es kommt vielmehr darauf an, dass im alltäglichen Mathematikunterricht viele kleine Inseln des eigenverantwortlichen Lernens geschaffen werden, die den Schülern Freiräume bieten, um selbständig das zu tun, was traditionellerweise unter enger Führung des Lehrers geschieht. Das kleinschrittige, fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch, vom Lehrer anhand der Fachsystematik zeitökonomisch auf das Unterrichtsziel hin geführt, besitzt in manchen Situationen sehr wohl Berechtigung. Problematisch ist es nur, wenn ein derartiger Unterrichtsstil im Mathematikunterricht generell dominiert.

Die Möglichkeiten, Phasen eigenverantwortlichen Arbeitens in den Unterricht zu integrieren sind vielfältig. Selbständigkeit, Selbstverantwortung und Selbstmanagement können sowohl beim Erarbeiten von Neuem, beim Einüben von Routineaufgaben wie auch beim Problemlösen trainiert werden, indem die Schüler in geeigneten Lernarrangements aktiv planen und gestalten, strukturieren und organisieren, diskutieren und argumentieren, rechnen und schreiben, forschen und entdecken oder zusammenfassen und präsentieren. Alle in diesem Artikel vorgestellten Aufgaben würden sich für einen derartigen Einsatz im Unterricht eignen.

Insbesondere sollen die folgenden Beispiele hierzu einige Anregungen bieten (auch wenn sie bei weitem nicht das Spektrum aller Möglichkeiten abdecken).

EVA beim Erarbeiten von Neuem
Die folgenden Arbeitsaufträge können etwa dazu dienen, die Schüler den Satz über die Winkelsumme im Dreieck selbständig (und kooperativ) entdecken zu lassen.

Winkel im Dreieck

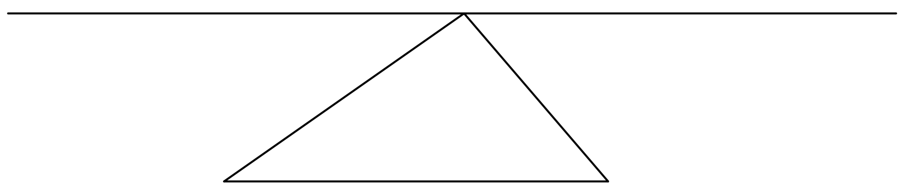
1. Zeichne verschiedene Dreiecke, miss jeweils die Innenwinkel und berechne ihre Summe. Diskutiere über deine Ergebnisse mit deinem Nachbarn.

2. Schneide ein Dreieck aus Papier aus und zerreiße es so, dass du die drei Innenwinkel aneinander legen kannst.

3. Formuliere ausgehend von deinen Beobachtungen eine Vermutung!

4. Begründe deine Vermutung!

   Ein möglicher Weg: Argumentiere mit Hilfe der folgenden Skizze:



Am Ende einer derartigen Unterrichtssequenz muss natürlich eine Zusammenfassung im Klassenplenum stehen. Dies kann etwa im Rahmen einer Präsentation der Schülerergebnisse geschehen.

EVA bei Routineaufgaben
Routineaufgaben, die oft in umfangreichen „Plantagen" in Schulbüchern angeboten werden, haben ihre berechtigte Stellung im Mathematikunterricht, dienen sie doch vor allem dazu, mit Neuem vertraut zu werden sowie Wissen und Fertigkeiten zu automatisieren.
Wenn Schüler derartige Aufgaben eigenverantwortlich bearbeiten sollen, ist es notwendig, dass sie den Erfolg ihres Arbeitens auch selbständig kontrollieren können und sie hierzu nicht auf den Lehrer angewiesen sind. Ein Beispiel für die 5. Jahrgangsstufe:

Flaggen färben

Löse die folgenden Aufgaben. Den Ergebnissen kannst du mit der unten stehenden Tabelle Farben zuordnen und die Flaggen entsprechend ausmalen.

a) $111012 : (4328 - 4009)$

b) $55 \cdot 71 - (5278 : 26 - 2516 : 34)$

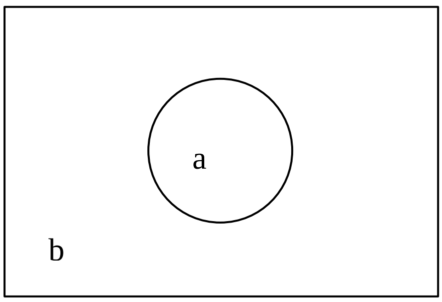
c) $[\,7^3 - (\,6^4 : 12 - 20\,)] : [\,2^6 - (\,3^4 - 2^5\,)]$

d) Subtrahiere den Quotienten der Zahlen 323 und 17 vom Produkt aus 17 und 113.

e) Um wie viel ist das Produkt aus 12 und 17 größer als die Summe dieser Zahlen?

f) Hanna ist 13 Jahre alt, Laura 11 Jahre und Eva 10 Jahre. In wie viel Jahren werden sie zusammen 100 Jahre alt sein?

Die Flaggen:



Für welche Länder stehen die Flaggen?

Die Lösungen:

grün	gelb	rot	blau
22 3776	175	17 348	1902

EVA bei komplexeren Aufgaben und beim Problemlösen

Soll ein komplexeres mathematisches Problem von den Schülern eigenständig bearbeitet werden, kann es sinnvoll und notwendig sein, dass die Lehrkraft das Problem je nach Leistungsfähigkeit der Klasse anhand kleinerer Arbeitsaufträge vorstrukturiert, um die Schüler nicht zu überfordern und ihre Bemühungen nicht zum Scheitern zu verurteilen.

Erfolge auf Zwischenetappen können dem Arbeiten der Schüler zudem zusätzlichen Ansporn geben. Natürlich muss eine derartige Vorstrukturierung aber offen gestaltet sein, um die Kreativität und die Phantasie der Schüler nicht zu sehr einzuengen.
Es versteht sich von selbst, dass die Kooperation der Schüler untereinander in derartigen problemorientierten Unterrichtsphasen nicht nur zugelassen, sondern ausdrücklich erwünscht sein sollte.
Hier ein Beispiel, das sich zur Abrundung einer Unterrichtseinheit über Vierecke in der Mittelstufe eignet und anhand dessen die Schüler begründen können, dass das Quadrat unter allen umfangsgleichen Vierecken den größten Flächeninhalt hat.
(Nebenbemerkung: Bei dieser Aufgabe lassen sich zum kontinuierlichen Variieren einer geometrischen Figur hervorragend dynamische Geometriesysteme nutzen. Siehe hierzu auch 2.6.)

Dreiecke und Vierecke

1. Betrachte Dreiecke mit einer festen Seitenlänge a und einem festen Umfang. Wie hängt der Flächeninhalt dieser Dreiecke von deren Form ab?

2. Zeichne eine beliebige Raute. Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn man daraus weitere Rauten erzeugt, indem man von der ursprünglichen Raute die Form verändert, den Umfang aber beibehält?

3. Betrachte ebenso verschiedene Drachenvierecke mit festem Umfang.

4. Untersuche beliebige Vierecke, die aber alle den gleichen Umfang haben. Welches Viereck hat die größte Fläche?

5. Fasse deine Ergebnisse zu einem Lehrsatz zusammen und begründe diesen!

2.3 Offene Fragestellungen

Aufgaben im Mathematikunterricht sind in der Regel zielorientiert formuliert und laufen auf eine einzige, leicht überprüfbare Lösung zu, wobei der anzustrebende Lösungsweg bei komplexeren Problemen meist durch die Aufgabenstellung vorgegeben wird. Die Tätigkeiten der Schüler beschränken sich oftmals nur darauf, aus der aktuell behandelten Unterrichtssequenz die Lösungsverfahren zu suchen und anzuwenden, auf die die Aufgabenstellung hinweist.
Ein weitaus vielschichtigeres Anspruchsniveau bieten offene Aufgaben, deren Formulierung ein Problem zunächst nur grob umreißt, die aber als Ausgangspunkt für eigenständiges (nicht nur) mathematisches Arbeiten, Forschen und Entdecken dienen können.
Offenheit bedeutet also, dass die Aufgabe keine eindeutige Fragestellung vorgibt, sondern dass die Schüler aufgefordert sind, selbständig zu analysieren, zu interpretieren, Fragen zu stellen, Entscheidungen zu treffen, aufgeworfene Probleme zu lösen und erarbeitete Ergebnisse zu diskutieren und zu präsentieren.
Hierzu ein Beispiel für die 5. Jahrgangsstufe aus [LEU Stuttgart 2001, S.6]:

Ein neues Kinderzimmer

Familie Schwarz hat für neue Kinderzimmermöbel 1500 DM gespart. Sie hat folgende Möbelstücke auf der Wunschliste:

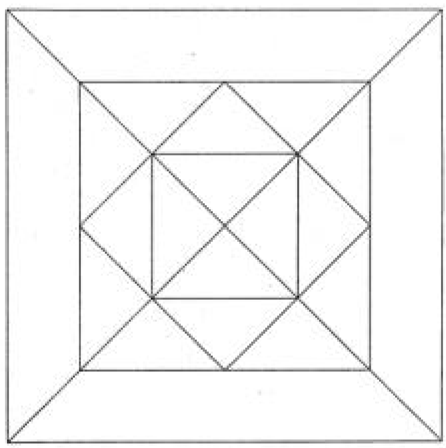
1 Bett für	369 DM
1 Schrank für	497 DM
1 Spieltisch für	198 DM
1 Schreibtisch für	298 DM
1 Sofa für	425 DM

Es wird keine eng umrissene Aufgabe formuliert, sondern eine Situation beschrieben, die zum Nachdenken und Diskutieren einlädt und implizit Fragestellungen aufwirft wie z.B. „Reicht das Geld für die Anschaffungen?", „Welche Gegenstände sind unbedingt nötig?", „Sollen möglichst genau 1500 DM ausgegeben werden?", „Kann ein Rabatt ausgehandelt werden?", „Welche Größenordnung ist für einen solchen realistisch?", ... Dass hierbei die Addition und die Subtraktion natürlicher Zahlen geübt werden soll, erscheint fast nebensächlich.

Die nächste Aufgabe lässt sich in verschiedenen Jahrgangsstufen und Unterrichtszusammenhängen nutzen – wie z.B. Symmetrie, Dreiecke, Vierecke, Umfang, Flächeninhalt, Prozentrechnung, zentrische Streckung, ... (Die Idee hierzu stammt von Prof. Baptist, vgl. auch [Wurz, 1998].)

Balkongitter

Hier siehst du das Muster eines Balkongitters:



Stelle möglichst viele Eigenschaften dieser Figur zusammen!

Überlege dir interessante Fragen zu dem Muster und lasse sie von deinem Nachbarn beantworten!

Auch die Untersuchung von Funktionen muss nicht nach dem starren Raster der Kurvendiskussion erfolgen, sondern kann sehr offen angeregt werden:

Funktionen erforschen

Betrachte die Schar von Funktionen

$$f_a(x) = \sqrt{x(a-x)}$$

mit einem Parameter $a \in \boldsymbol{R}^+$.
Entdecke möglichst vielfältige Eigenschaften dieser Funktionenschar!

Es ist zunächst offen, was gemacht werden soll bzw. überhaupt gemacht werden kann. Wenn man sich aber etwas mit der Aufgabe beschäftigt, zeigt sich, dass sich hinter den Funktionen eine Schar von Halbkreisen verbirgt. Dies gilt es zu entdecken, zu beschreiben und zu beweisen!

2.4 Lernzirkel und Stationenlernen

Es wäre schade, wenn sich EVA im Mathematikunterricht nur auf die bisher beschriebenen Aktivitäten beschränken würde. Die Anforderungen hinsichtlich der Eigenverantwortung und der Selbstorganisation können etwa im Rahmen von Lernzirkeln oder durch Stationenlernen weiter gesteigert werden. Beide Begriffe werden in der Literatur teils synonym gebraucht, teils wird mit dem Begriff des Lernzirkels betont, dass die Stationen in einer vorgegeben Reihenfolge stehen.
Wichtig ist jeweils, dass die Schüler in Kleingruppen die Aufgabenstellungen der einzelnen Stationen selbständig und eigenverantwortlich bearbeiten und sie dabei ihr Lern- und Arbeitstempo individuell bestimmen. Hierbei sind die Schüler auch gefordert, den ihnen zur Verfügung stehenden Zeitrahmen sinnvoll einzuteilen und zu nutzen und dabei immer wieder zu überprüfen, ob sie ihren eigenen Zeitplan auch einhalten. Dies sind Notwendigkeiten, mit denen sich die Schüler üblicherweise im Mathematikunterricht nur wenig konfrontiert sehen, die aber gerade für eigenständiges Erschließen größerer Zusammenhänge von immenser Bedeutung sind.
Neben Pflichtstationen, die alle Schüler bearbeiten, kann ein Lernzirkel auch Stationen mit höheren Anforderungen enthalten, die sich vor allem an schnellere und leistungsfähigere Schüler wenden.
Der Lehrer hält sich in derartigen Unterrichtsformen sehr zurück, steht aber als Berater zur Verfügung. Erfahrungsgemäß ist solcher Unterricht für Lehrkräfte sehr entspannend, sind sie doch vom ständigen Organisieren und „Geben-Müssen“ weitgehend befreit.
Allerdings bedarf es intensiver Vorbereitungszeit, um etwa einen gut durchdachten Lernzirkel auszuarbeiten. Hier sollte der kollegiale Austausch der Lehrkräfte – auch schul(art)übergreifend – viel mehr genutzt werden. Fortbildungsveranstaltungen oder ähnliche Tagungen könnten noch mehr als Austauschforen für derartige Unterrichtsmaterialien dienen.

Schließlich sei darauf hingewiesen, dass sich auf dem BLK-Server unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de bereits zahlreiche Lernzirkel befinden, die nach Abschluss des BLK-Programms SINUS der Öffentlichkeit zugänglich gemacht werden. Es kann sich auch durchaus lohnen, Internet-Suchmaschinen auf den Begriff „Lernzirkel“ anzusetzen.

2.5 Projektarbeit

Unterrichtsprojekte sind sicher die anspruchsvollste, aber gleichzeitig ertragreichste Form eigenverantwortlichen Arbeitens. Anspruchsvoll sind sie deshalb, weil sie auf Schülerseite bereits ein hohes Maß an Methodenkompetenz, Selbstmanagement und Sozialkompetenz voraussetzen, sollen sie nicht zu einem lehrerzentrierten Lehrgang entarten, in denen letztendlich doch der Lehrer plant, strukturiert, organisiert, Materialien beschafft und bearbeitet oder gar Ergebnisse produziert und präsentiert.
Allerdings sind Unterrichtsprojekte auch ausgesprochen gewinnbringend, nicht nur, weil sie viel Freiraum für Eigeninitiative, Kreativität, gestalterisches Wirken, Selbständigkeit, Eigenverantwortung und Kooperation bieten (und derartige Kompetenzen intensiv fördern), sondern auch, weil sie den organisatorischen Rahmen schaffen, um interessanten, auch unkonventionellen Fragen nachzugehen und dabei als Projektergebnisse Produkte herzustellen, auf die alle Beteiligten stolz sein können.
In der Literatur gibt es verschiedene Phasenmodelle, die den Ablauf eines Projekts gliedern (siehe z.B. das sehr empfehlenswerte Buch [Frey 1998]). Ich denke für Projekte im Mathematikunterricht sind vor allem folgende Etappen sinnvoll:

- **Planungs- und Vorbereitungsphase:** Ausgehend von einer Projektinitiative, die im Idealfall von den Schülern, in der Praxis wohl eher vom Lehrer stammt, werden Ideen gesammelt und geordnet sowie Ziele und Wege zum Erreichen dieser Ziele festgelegt.

- **Realisierungsphase:** Die Planungen werden umgesetzt und das gewünschte Produkt hergestellt.

- **Präsentationsphase:** Das Ergebnis der Projektarbeit wird in der Klasse vorgestellt und dann einer größeren Gruppe, etwa der Schulgemeinschaft, präsentiert.

- **Evaluationsphase:** Am Ende steht eine „Manöverkritik“, in der die Tätigkeiten und Ergebnisse kritisch reflektiert und diskutiert werden.

Gerade für die Schule erscheint mir die Präsentationsphase von besonderer Bedeutung. Hat das Projekt zu befriedigenden Ergebnissen geführt, sollten diese beispielsweise mittels einer Ausstellung, eines Zeitungsberichts oder einer öffentlichen Aktion publikumswirksam dargestellt werden. Dadurch wird einerseits die Arbeit der Schüler adäquat gewürdigt, andererseits bieten derartige Präsentationen eine wirkungsvolle Möglichkeit, die Mathematik im Schulleben sichtbarer werden zu lassen, sie aus dem „Elfenbeinturm“ des Klassenzimmers herauszuholen und sie über den Unterricht hinaus wirken zu lassen. Dies trägt nicht zuletzt dazu bei, das Bild der Mathematik und die Wertschätzung dieses Faches in der Klasse, in der Schulgemeinschaft, im Elternhaus und damit auch in der Gesellschaft zu verbessern.

Willkürlich zusammengestellte Themen für mögliche Projekte im Mathematikunterricht (die hier nur als Anregung dienen sollen) wären etwa:

Projekte im Mathematikunterricht

- Rund um den Kreis
- Pyramiden
- Messen im Gelände
- Die Oberfläche des Schulhauses
- Fraktale – Schönheit und Chaos in der Mathematik
- Wie lässt sich der Schulbusverkehr optimieren?
- Bei welchen Eintrittspreisen erzielt das städtische Freibad den größten Gewinn?

(Letzteres sind Optimierungsprobleme, bei denen man sich die Daten erst selbst beschaffen muss.)

In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeit von M. Ludwig „Symmetrie, Sonnenfinsternis und mathematische Phantasiebegriffe" verwiesen, in denen einige Projekte im Mathematikunterricht konkret beschrieben werden. Sie ist auf dem BLK-Server *http://blk.mat.uni-bayreuth.de* unter „Materialien zum Mathematikunterricht" zu finden.

Eine persönliche Erfahrung: Ich bemühe mich, pro Schuljahr mit ein oder zwei Klassen ein größeres Unterrichtsprojekt durchzuführen. Dies erscheint mir angesichts der schulischen Rahmenbedingungen realistisch und vertretbar. Zudem muss ich feststellen, dass auch nicht jede Klasse hinsichtlich ihres Potentials und ihrer Kompetenzen (schon) zu sinnvoller Projektarbeit fähig ist.

2.6 Dynamische Geometrieprogramme und Computeralgebrasysteme

Interaktive Computergeometrieprogramme wie GEONExT, EUKLID, THALES oder CINDERELLA können dem Mathematikunterricht neue Impulse geben und ihm neue Möglichkeiten eröffnen. Sie schaffen Freiräume für kreativen Umgang mit Mathematik sowie für eigenständiges Erforschen, Vermuten und Entdecken. Durch das kontinuierliche Variieren einer geometrischen Konfiguration ergeben sich ganz neue Visualisierungsmöglichkeiten, die mit Papier und Bleistift nur schwer bzw. überhaupt nicht darstellbar sind. Der Spurmodus ermöglicht einfaches Zeichnen von Ortskurven.
Arbeiten im Computerraum bedeutet für die Schüler aber auch zwangsläufig eigenverantwortliches Arbeiten; dies liegt bereits an den äußeren Rahmenbedingungen. So lassen sich mit Computergeometrieprogrammen und dynamischen Arbeitsblättern leicht Lernsituationen erzeugen, in denen die Schüler geometrische Zusammenhänge experimentell entdecken und eigenständig erarbeiten können. Beispiele hierzu sind ausführ-

lich und variationsreich im Buch „GEONET ... und die Geometrie lebt!“ [Neidhardt, Oetterer 2000] dargestellt. (Die aktuelle Version dieses Programms ist unter http://geonext.de kostenfrei herunterladbar.)

Ein Beispiel zur Untersuchung der Transversalen im Dreieck:

Transversalen im Dreieck

1. Zeichne mit dem Geometrieprogramm ein Dreieck und konstruiere seine Höhen.
2. Zeige experimentell, dass sich die Höhen in einem Punkt schneiden.
   Wie hängt die Lage dieses Punktes von der Form des Dreiecks ab?
3. Beobachte die Bahn des Höhenschnittpunkts, wenn man eine Ecke des Dreiecks bewegt – etwa parallel zur gegenüberliegenden Seite?
4. Variiere dein bisheriges Vorgehen! (Betrachte beispielsweise Seitenhalbierende, Winkelhalbierende oder Mittelsenkrechte des Dreiecks.)

Auch Computeralgebrasysteme (Derive, Maple V, MuPad,...) schaffen neue Perspektiven. Das Vereinfachen von Termen, Lösen von Gleichungen, Bilden von Ableitungen, Berechnen von Integralen oder Zeichnen von Graphen übernimmt der Computer auf Knopfdruck. Dadurch entfallen klassische Routineaufgaben, komplexe Probleme, die aufwendige Berechnungen erfordern, werden mit dem CAS als Werkzeug erschließbar. Beispielsweise lassen sich auch in der Mittelstufe mit einem CAS kompliziertere Funktionen leicht untersuchen, ohne dass der Kalkül der Differentialrechnung nötig ist. Hierzu ein Extremwertproblem, das sich etwa im Zusammenhang mit dem Satz von Pythagoras oder Wurzelfunktionen bearbeiten lässt:

Der Heimweg des Leuchtturmwärters

Ein Leuchtturm liegt 5 km vor der Küste. Der Leuchtturmwärter wohnt in einem Küstenort, der 13 km Luftlinie vom Leuchtturm entfernt ist. Wenn der Wärter nach Hause fährt, hat er im Wasser mit dem Boot eine Geschwindigkeit von 6 km/h, auf der geradlinigen Küstenstraße ist er mit dem Fahrrad 15 km/h schnell.

Wie lange dauert der Heimweg (in Abhängigkeit von der Wegstrecke auf dem Festland)?

Welcher Weg ist für den Wärter „am günstigsten“?

Der folgende Aufgabenkomplex kann zur Vertiefung des Ableitungsbegriffs dienen. Gleichzeitig zeigt er aber auch, dass schriftliches Differenzieren ab einer gewissen Komplexität der Funktionen nicht mehr praktikabel ist und man statt dessen effizienterweise ein CAS nutzen sollte.

Die Fichte

Die Fichte ist im gesamten europäischen Raum weit verbreitet. Mit einem Anteil von etwa 40% am Waldbestand der Bundesrepublik stellt sie eine wirtschaftlich bedeutende Holzart dar. Je nach Standort können Fichten einige Hundert Jahre alt werden und Höhen bis zu 60 m sowie Durchmesser bis zu 1,5 m erreichen.

Die Höhe h (in m) einer Fichte hänge gemäß der Funktion

$h(t) = \dfrac{50t^2 + 200t}{t^2 - 10t + 2000}$ von der Zeit t (in Jahren) ab.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion *h(t)*.

b) Welche Höhe erreicht die Fichte nach 200 Jahren?
Wie lange dauert es, bis die Fichte 25 m hoch ist?

c) Zu welchem Zeitpunkt wächst die Fichte am schnellsten?
Geben sie die Wachstumsgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von der Zeit an und stellen Sie diesen Zusammenhang graphisch dar!

d) Um wie viel nimmt die Höhe einer 15-jährigen Fichte im Schnitt pro Tag zu?
(Tatsächlich dauert die Wachstumsperiode einer solchen Fichte nur etwa drei Monate pro Jahr.)

Der Durchmesser d der Fichte in der Mitte ihres Stammes wird durch die Funktion

$d(t) = \dfrac{0{,}7t^2 + 21t}{t^2 + 10t + 6000}$ beschrieben (d in Metern, t in Jahren).

e) Stellen Sie diese Funktion *d(t)* graphisch dar!

f) Welchen Durchmesser hat die Fichte nach 200 Jahren, wann hat sie die Hälfte dieses Durchmessers erreicht?

Auffälliges Merkmal einer Fichte ist ihr schlanker, relativ astarmer Wuchs. Das Verhältnis von Höhe und mittlerem Durchmesser des Stammes beschreibt die Schlankheit

$s(t) = \dfrac{h(t)}{d(t)}$ der Fichte.

g) Verschaffen Sie sich einen Überblick über diese Funktion!
Zu welchem Zeitpunkt ist die Schlankheit der Fichte extremal?

h) Wie hängt das Volumen des Fichtenstammes von der Zeit ab?
Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Funktion!

i) Welchen finanziellen Wert besitzt eine 200jährige Fichte, wenn ein Kubikmeter ungeschnittenes Fichtenholz 80 Euro kostet?

j) Zu welchem Zeitpunkt ist der Volumenzuwachs der Fichte am größten?
Ermitteln Sie den Zuwachs des Volumens in seiner Abhängigkeit von der Zeit und stellen Sie diesen Zusammenhang graphisch dar.

k) In welchem Alter nimmt die Masse der Fichte am schnellsten zu?
Wie groß ist dieser Massenzuwachs (pro Jahr bzw. pro Tag) und wie hoch ist die Fichte in diesem Alter?
(Die Dichte von frischem Fichtenholz beträgt etwa 800 kg/m^3.)

Wie man sieht, wird der Mathematikunterricht durch den Einsatz von Computern nicht unbedingt leichter. Auch wenn der Computer Routineaufgaben übernimmt, ist dennoch ein solides Verständnis für mathematische Konzepte nötig, um dem Medium Computer nicht hilflos gegenüberzustehen.
Natürlich muss die Lehrkraft zunächst Zeit investieren, um die Schüler (und auch sich selbst) mit der Hard- und Software vertraut zu machen. Ich denke aber, dies ist ein Aufwand, der sich lohnt. Einerseits erweitern die Schüler dadurch ihre Kompetenzen im Umgang mit neuen Medien, andererseits sehen sie aber auch, dass Computer ein sinnvolles und manchmal unverzichtbares Hilfsmittel zur Bearbeitung mathematischer Probleme sind, und gleichzeitig haben sie Gelegenheiten, EVA in einem sehr motivierenden Umfeld zu praktizieren.

Noch eine Bemerkung: Neuere Programme wie GEONExT, so genannte „GAS“ (Geometrie-Algebra-Systeme), sind Geometrieprogramme mit integriertem Algebrasystem. Sie lassen sich sowohl in der Elementargeometrie, wie auch in der Trigonometrie, der Analysis oder der Analytischen Geometrie vielfältig einsetzen und können Schüler während ihrer gesamten Schulzeit begleiten. Insbesondere bieten sie wertvolle Hilfen, wenn Probleme die Verknüpfung verschiedener mathematischer Disziplinen erfordern, wenn etwa das Variieren einer geometrischen Konfiguration auf einen funktionalen Zusammenhang und damit auf die Untersuchung einer Funktion mit Mitteln der Analysis führt. (Man denke etwa an Optimierungs- und Extremwertprobleme.) Derartige Lernumgebungen werden derzeit am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth entwickelt und voraussichtlich 2002 veröffentlicht.

3. Methodentraining

Eigenverantwortliches Arbeiten der Schüler setzt voraus, dass sie über ein gewisses Maß an methodischen Strategien und Routinen verfügen. Fehlen diese, so führen offene Formen des Unterrichts bei einer Mehrzahl der Schüler schnell zu chronischer Überforderung, wenn sie auf sich alleine gestellt arbeiten sollen. Traditionellerweise werden die Lernmethoden im Unterricht vom Lehrer vorbereitet und vorgegeben. Der Lehrer weist den methodischen Weg bzw. geht ihn selbst vor, die Schüler folgen. Deshalb ist es nur verständlich, dass sie zunächst hilflos reagieren, wenn die gewohnten Lehreranweisungen fehlen. („Was sollen wir denn da machen?“)
Es ist illusorisch, zu meinen, dass sich die notwendigen methodischen Kompetenzen bei den Schülern von selbst einstellen, wenn man sie in offenem Unterricht nur gewähren lässt. Zumindest die unsicheren oder leistungsschwächeren Schüler sind darauf angewiesen, dass man elementare Lern- und Arbeitstechniken systematisch einübt.
Hierbei dürfen Methodentraining und fachliches Lernen nicht als Gegensätze gesehen werden, sondern als sich ergänzende, aufeinander angewiesene Komponenten eines ausgewogenen Fachunterrichts. Wenn die methodische Versiertheit der Schüler wächst und sie über ein fundiertes Repertoire an Arbeitstechniken verfügen, nehmen auch Selbstvertrauen, Selbständigkeit und – so ist zu hoffen – der fachliche Lernerfolg zu.

3.1 Fachunspezifische Lern- und Arbeitstechniken

Die folgenden Aspekte sollen aufzeigen, wie im Mathematikunterricht im Rahmen fachlichen Arbeitens ganz elementare Arbeitstechniken geübt und gepflegt werden können. Damit wirkt Mathematikunterricht in besonderem Maße allgemeinbildend, da derartige Kompetenzen natürlich universell nutzbar sind.

Rasche Texterfassung
Viele Schüler haben erfahrungsgemäß Schwierigkeiten, einen Text rationell nach bestimmten Informationen zu durchsuchen. Das gängige Wort-für-Wort-Lesen ist nicht nur ermüdend, sondern auch zeitaufwändig und uneffektiv, wenn es nur darum geht, einen Überblick zu gewinnen oder Schlüsselinformationen herauszufiltern.
Bewusstes Arbeiten mit Texten ist nicht den sprachlichen Fächern vorbehalten, sondern kann auch im Mathematikunterricht stattfinden und diesen ausgesprochen bereichern. Der folgende Textauszug aus der Bibel zeigt zudem, dass sich die Menschheit bereits seit Jahrtausenden mit geometrischen Objekten beschäftigt. Er gibt sogar einen Hinweis darauf, mit welchem Wert für die Kreiszahl π zur Zeit König Salomos gearbeitet wurde.

Mathematik in der Bibel

In der Bibel wird im Ersten Buch der Könige in Kapitel 7 die Ausstattung des Tempels in Jerusalem beschrieben.
Lies den Textabschnitt möglichst zügig im Hinblick auf die folgende Frage durch:

a) Welche Maße hatte das „Meer“?
(Damit ist ein Bronzebecken gemeint, das König Salomo für den Tempel anfertigen lies und das für die Waschungen der Priester bestimmt war.)

König Salomo ließ Hiram aus Tyrus kommen. Dieser war der Sohn einer Witwe aus dem Stamm Naftali. Sein Vater war ein Bronzeschmied aus Tyrus. Er war mit Weisheit, Verstand und Geschick begabt, um jede Bronze-Arbeit auszuführen. Er kam zum König Salomo und führte alle Arbeiten für ihn aus.
Er formte die zwei bronzenen Säulen. Achtzehn Ellen betrug die Höhe der einen Säule, und ein Band von zwölf Ellen umspannte sie. Ihre Wandstärke betrug vier Finger; innen war sie hohl. Ebenso war die zweite Säule. [...]
Dann machte er das „Meer“. Es wurde aus Bronze gegossen und maß zehn Ellen von einem Rand zum andern; es war völlig rund und fünf Ellen hoch. Eine Schnur von dreißig Ellen konnte es rings umspannen. Unterhalb seines Randes waren rundum Rankengebilde. In einer Länge von dreißig Ellen umsäumten sie das Meer ringsum in zwei Reihen. Sie wurden beim Guss mitgegossen. Das Meer stand auf zwölf Rindern. Von ihnen schauten drei nach Norden, drei nach Westen, drei nach Süden und drei nach Osten. Das Meer ruhte oben auf den Rindern. Ihre Hinterteile waren nach innen gekehrt. Die Wand des Meeres war eine Handbreit dick. Sein Rand war wie der Rand eines Bechers geformt, einer Lilienblüte gleich. Es fasste zweitausend Bat.

b) Fertige eine Zeichnung des „Meeres“ an!

c) Eine Elle beträgt etwa 49 cm. Wie viele Liter enthält ein Bat?

d) Welcher Wert für π ist der Bibelstelle zu entnehmen?

e) Suche die obige Textpassage in der Bibel und informiere dich über das weitere Umfeld!

Systematisches Lesen
Wissenstransfer erfolgt – nicht nur in der Schule – in hohem Maße über das geschriebene Wort. Deshalb sind Fertigkeiten, aus einem Text Informationen zu entnehmen und sie effizient nutzbar in das eigene Wissen einzugliedern, ungemein wichtig.
Schüler beklagen sich oft darüber, dass sie zu „lernende“ Texte zwar fleißig mehrmals gelesen hätten, sie diese aber angesichts des Umfangs nicht behalten könnten. Hierbei erfolgt das Lesen meist in der Form, dass der betreffende Text Wort für Wort abgetastet wird, eine gleichzeitige Strukturierung, Reflexion und Reorganisation des Inhalts aber ausbleibt.

Dem können gezielte Anleitungen zu systematischem Lesen entgegenwirken, nicht nur im Deutsch-, sondern (fächerverbindend) auch im Mathematikunterricht.

Die 5-Schritt-Lesemethode

Sicher hast du schon die Erfahrung gemacht, dass du einen Text sorgfältig Wort für Wort gelesen hast, vom Inhalt aber wenig hängen geblieben ist. Dies kann leicht frustrieren!
Die folgenden fünf Schritte können dir helfen, Texte effizient zu erarbeiten.

1. **Überfliegen**: Versuche, möglichst rasch eine grobe Vorstellung vom Inhalt und vom Aufbau des Textes zu gewinnen.

2. **Fragen an den Text**: Wovon handelt der Text? Auf welche Fragen gibt er Antwort?

3. **Gründlich lesen**: Lies den Text aufmerksam durch. Denke dabei an die vorher formulierten Fragen.

4. **Zusammenfassen**: Mache nach jedem Sinnabschnitt eine kurze Pause und fasse den Inhalt mit einer Überschrift oder einem kurzen Satz zusammen.

5. **Wiederholen**: Rekapituliere die Kernaussagen des Textes. Gib die wesentlichen Informationen mit eigenen Worten wieder (mündlich oder schriftlich).

Dieses Vorgehen kannst du mit folgendem Text trainieren, den der Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) für sein Lehrbuch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ verfasst hat.

Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen

Die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl ist nichts anderes als eine Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist. Also ist 2 die Quadratwurzel von 4, 3 die Quadratwurzel von 9, 4 diejenige von 16 usw., wobei zu beachten ist, dass diese Wurzeln sowohl mit dem Zeichen plus als auch minus gesetzt werden können. So ist die Quadratwurzel der Zahl 25 sowohl +5 als auch –5, weil –5 mit –5 multipliziert ebenso +25 ausmacht wie +5 mit +5 multipliziert.

Wenn daher die gegebene Zahl ein Quadrat ist und man die Quadratzahlen soweit im Gedächtnis hat, ist es leicht, die Quadratwurzel zu finden; wenn z.B. die gegebene Zahl 196 heißt, dann weiß man, dass die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer; so ist aus Obigem klar, dass zum Bruch $\frac{25}{49}$ *die Quadratwurzel* $\frac{5}{7}$ *gehört, weil man nur sowohl vom Zähler als auch vom Nenner die Quadratwurzeln zu nehmen braucht. Ist die gegeben Zahl eine gemischte, wie etwa* $12\frac{1}{4}$*, so verwandelt man diese in einen unechten Bruch, nämlich* $\frac{49}{4}$*, dessen Quadratwurzel offenbar* $\frac{7}{2}$ *oder* $3\frac{1}{2}$ *ist; diese Zahl ist also die Quadratwurzel von* $12\frac{1}{4}$*.*

*Wenn aber die gegebene Zahl kein Quadrat ist, wie z.B. 12, dann ist es auch nicht möglich, die Quadratwurzel, d.h. eine solche Zahl, die mit sich selbst multipliziert gerade 12 ausmacht, zu finden oder anzugeben. Indessen wissen wir doch, dass die Quadratwurzel von 12 größer als 3, doch aber kleiner als 4 sein muss, weil 3*3 nur 9, aber 4*4 schon 16 ergibt. Wir wissen sogar auch, dass sie kleiner sein muss als* $3\frac{1}{2}$*, weil das Quadrat von* $3\frac{1}{2}$ *mehr ist als 12.*

Hierdurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, die sich nicht durch Brüche ausdrücken lassen und dennoch eine bestimmte Größe haben. Diese neue Art von Zahlen wird Irrationalzahlen genannt und entsteht immer dann, wenn man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, die kein Quadrat ist. Da also z.B. 2 keine Quadratzahl ist, stellt die Quadratwurzel von 2, also diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert genau 2 hervorbringt, eine Irrationalzahl dar.

Obwohl sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch darstellen lassen, haben wir doch einen deutlichen Begriff von ihrer Größe. Denn mag z.B. auch die Quadratwurzel von 12 noch so verborgen scheinen, so wissen wir doch, dass sie eine Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert gerade 12 hervorbringt. Diese Eigenschaft reicht aus, um uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, bedienen wir uns eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel solcher Zahlen, die keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat die Gestalt $\sqrt{}$ *und wird Quadratwurzel ausgesprochen.*

Die eben gegebene Erklärung der Irrationalzahlen führt uns sogleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen mit ihnen auszuführen. Weil nämlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multipliziert 2 geben muss, wissen wir: Wenn $\sqrt{2}$ *mit* $\sqrt{2}$ *multipliziert wird, muss 2 herauskommen; entsprechend gibt* $\sqrt{3}$ *mit* $\sqrt{3}$ *multipliziert 3 und überhaupt* $\sqrt{a}$ *mit* $\sqrt{a}$ *multipliziert a.*

Weiterführendes:

a) In welchem Punkt unterscheiden sich die Ausführungen Eulers von der heutigen Mathematik?
b) Informiere dich über das Leben von Leonhard Euler und seine Zeit und berichte deinen Mitschülern darüber.

Arbeiten in der Bibliothek – Nachschlagewerke nutzen

Üblicherweise versorgt der Lehrer die Schüler mit Informationsquellen. Er fordert zum Aufschlagen des Schulbuches auf einer bestimmten Seite auf oder teilt zusammengetragene Informationen auf Arbeitsblättern aus. Die Schüler müssen die Materialien nur entgegennehmen, sie sich aber in den seltensten Fällen selbst beschaffen. Infolgedessen reagieren Schüler oft hilflos, wenn sie etwa in einer Bibliothek ein bestimmtes Buch oder in einem bestimmten Buch eine bestimmte Information suchen sollen. Eigenver-

antwortliches Arbeiten bedarf aber auch Fertigkeiten der selbständigen Informationsbeschaffung, Fertigkeiten, die auch im Mathematikunterricht erworben werden können und die für die angestrebte Studierfähigkeit und die Fähigkeit zu lebenslangem Lernen von essentieller Bedeutung sind.
Anhand des folgenden Arbeitsauftrags können Schüler etwa mit dem Aufbau der Schulbibliothek vertraut gemacht werden und das Nutzen mathematischer Literatur bereits in der Mittelstufe trainieren.

Mathematik in unserer Schulbibliothek

Informiere dich mit deinem Partner möglichst umfassend über drei der folgenden Begriffe, stelle deine Ergebnisse übersichtlich dar und präsentiere sie deinen Mitschülern:

- Kreis des Apollonius
- Eulersche Gerade
- Fermatsche Vermutung
- Fermatsche (Prim-)Zahlen
- Feuerbachscher Kreis
- Fibonacci-Zahlen
- Goldbachsche Vermutung
- Möbiusband
- Pascalsches Dreieck
- Platonische Körper
- Primzahlzwillinge
- Pythagoreische Zahlentripel
- Vierfarbensatz
- arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Internetrecherche
Mit dem Internet steht ein riesiger Pool an Informationen zur Verfügung. Im Zuge eines Methodentrainings ist es auch von Bedeutung, die Schüler mit einer zielorientierten Nutzung dieses Mediums vertraut zu machen. Natürlich gibt es in jeder Klasse zahlreiche Computercracks, aber eben doch nicht allen Schülern sind die Informationsbeschaffung via WWW und der effektive Umgang mit Suchmaschinen geläufig. Hier kann der Mathematikunterricht einen Beitrag zur informationstechnischen Grundbildung leisten und gleichzeitig zum verantwortungsbewussten Umgang mit dem Internet erziehen.

Mathematiker im Internet

Informiere dich mit deinem Partner anhand des Internets über einen bedeutenden Mathematiker und erstelle eine Dokumentation seines Lebens!
Welche historischen Ereignisse fanden während seiner Lebenszeit statt?

(Achte dabei darauf, dass sich keine weitere Arbeitsgruppe in der Klasse mit „deinem“ Mathematiker befasst.)

Strukturieren und Visualisieren
Um komplexe Zusammenhänge eigenständig zu erarbeiten, bedarf es methodischer Kompetenzen. Zunächst unübersichtliche Informationsmengen sind zu gliedern und zu strukturieren und damit erschließbar und verwertbar zu machen. Derartige Fertigkeiten sind nicht nur für das schulische Lernen, sondern auch für das Arbeiten in einer auf ständigem Informationsfluss basierenden Berufswelt von essentieller Bedeutung.
Im Mathematikunterricht bieten sich Strukturierungs- und Visualisierungsübungen etwa zur Zusammenfassung größerer Lerneinheiten an. Zwei Beispiele:

> **Vokabeln in der Mathematik**
>
> Erstelle eine Übersicht zu den gelernten Begriffen
> Summe, Minuend, Divisor, Exponent, ... !

> **Potenzfunktionen**
>
> Erstelle eine Übersicht zum Thema „Die Graphen der Potenzfunktionen“!

Diagramme entwerfen
Diagramme begegnen uns ständig im täglichen Leben. Sie verständnisvoll zu lesen bzw. Diagramme zu erstellen sind Fähigkeiten, die fast als Kulturtechniken bezeichnet werden können.
Nun zeichnen Schüler im Rahmen ihrer Mathematiklaufbahn wohl insgesamt Hunderte von Funktionsgraphen. Dabei sind die formalen Vorgaben allerdings sehr starr und die gestalterischen Grenzen sehr eng. Deshalb erwerben sie dabei nicht automatisch die Kompetenz, Daten in Diagrammform übersichtlich darzustellen. Zu letzterem sind vielfältige Entscheidungen nötig, welche Visualisierungsart (Graph, Säulen-, Stab-, Kreis- oder Flussdiagramm, ...) am zweckmäßigsten ist und wie diese auszugestalten ist.
Im Mathematikunterricht bieten sich hierzu zahlreiche Anknüpfungspunkte an: Kreise, Prozentrechnung, Runden, Größen, Funktionen, ... Hier ein Beispiel:

> **Bevölkerungsentwicklung**
>
> Informiere dich mit Hilfe des Internets über Bevölkerungsentwicklung, stelle deine Ergebnisse übersichtlich dar und präsentiere sie deinen Mitschülern.

Makromethoden
In 2.4 und 2.5 wurden methodische Großformen des eigenverantwortlichen Arbeitens, sog. „Makromethoden“ dargestellt (im Gegensatz zu „Mikromethoden“ wie „systematisches Lesen“, „Internetrecherche“, ...). Um das Methodenbewusstsein und die Methodenkompetenz der Schüler nachhaltig zu schulen, ist es wesentlich, dass sich die Aktivitäten nicht nur auf das inhaltliche Handeln beschränken, sondern dass das organisatorische Vorgehen regelmäßig thematisiert und reflektiert wird. So sollten die Schüler etwa bei der Projektarbeit nicht nur „herumwerkeln“, sondern mit den theoretischen Grundlagen der Projektmethode und möglichen Phasenmodellen vertraut werden, um so die einzelnen Phasen bewusster erleben und gestalten zu können. Nur eine derartige Auseinandersetzung mit dem Handeln, eine kritische Reflexion des Abgelaufenen, Gegenwärtigen und Geplanten kann dazu führen, „aus einfachem Tun bildendes Tun zu machen“ [Frey 1998, S.70]

Fazit: Die vielfältigen im Unterricht eingesetzten Arbeitsmethoden dürfen nicht stillschweigend angewandt werden, sondern müssen regelmäßig thematisiert und diskutiert werden, um universell nutzbare methodische Kompetenzen bei den Schülern aufzubauen.

3.2 Mathematische Arbeitsweisen

Schüler vor allem höherer Jahrgangsstufen stellen mir gelegentlich die sehr berechtigte Frage, wozu sie den Mathematikstoff denn überhaupt lernen sollen, werden sie ihn doch – so ist die Meinung – im späteren Leben nie mehr brauchen. Eine hierauf einsetzende Diskussion führt meist zu der Einsicht, dass der Wert des Mathematikunterrichts nicht nur in den vermittelten Inhalten liegt, sondern dass die Beschäftigung mit Mathematik ein Weg ist, um das Denken zu schulen und den Verstand zu trainieren, und dass mathematische Denk- und Arbeitsweisen universell einsetzbar und damit auch für nicht-mathematische Tätigkeiten von Nutzen sind.
Letzteres darf natürlich nicht nur graue Theorie bleiben. Mathematikunterricht gewinnt – nicht zuletzt in der Meinung der Schüler – an besonderem Wert, wenn beim Arbeiten wo immer möglich die Strategien hinter dem Tun klar herausgestellt und damit mathematische Denkweisen explizit deutlich gemacht werden.
Nun gibt es hier vielfältige Aspekte: Systematisieren, Analogisieren, Kombinieren, Begriffe bilden, ... Die folgenden Ansätze sollen exemplarisch Anregungen bieten.

Modelle bilden
Angesichts der hohen Komplexität unserer Lebenswelt ist jede Beschreibung eines realen Objekts oder eines realen Vorgangs immer zwangsläufig mit einer Reduktion und Vereinfachung der Situation verbunden. Nur dadurch wird die Welt erschließbar und verstehbar.
Es ist eine typische Arbeitsweise eines Mathematikers, Probleme aus dem (beruflichen) Alltag in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, sie mit Hilfe der mathematischen Theorie zu lösen und die gewonnenen Ergebnisse in die Ausgangssituation zurück zu transferieren. Die folgende Aufgabe zeigt diese Arbeitsmethode der Modellbildung anhand einer betriebswirtschaftlichen Fragestellung auf. (Sie eignet sich auch ausgezeichnet zu eigenverantwortlichem und kooperativem Bearbeiten.)

Mathematik in der Betriebswirtschaft

Ein Unternehmen für Elektrogeräte stellt Computerbildschirme her. Werden pro Tag x Bildschirme produziert, so entstehen die Unkosten bzw. Ausgaben $A(x)$.
Der Bereich für Mathematik der Forschungsabteilung des Unternehmens hat ermittelt, dass die Funktion

$$A(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}9x^2 + 300x + 18000$$

diese Ausgaben in Euro näherungsweise beschreibt.

Die Bildschirme werden zum Preis von 240 Euro pro Stück an die Händler verkauft. Beim Verkauf von x Geräten erzielt das Unternehmen die Einnahmen $E(x)$ in Euro.

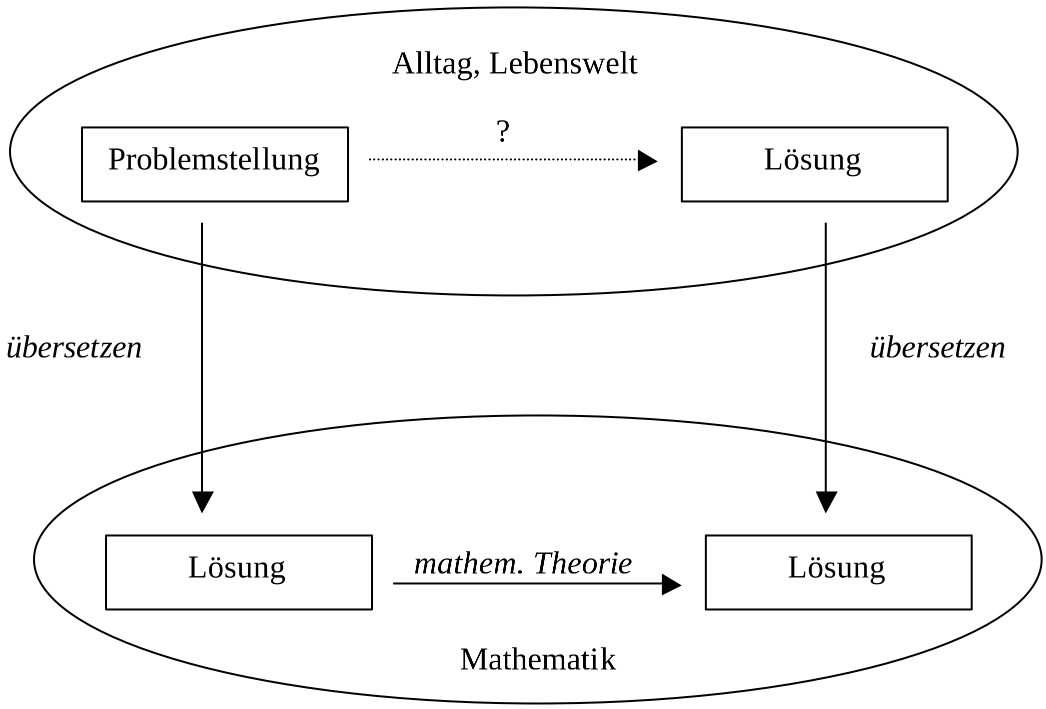
a) Stelle die Funktionen $A(x)$ und $E(x)$ graphisch dar und interpretiere ihren Verlauf.

b) Ermittle den Gewinn $G(x)$, den das Unternehmen mit der Herstellung und dem Verkauf von x Bildschirmen erzielt.
Deute den Verlauf des zugehörigen Graphen.

c) Die Leitung des Unternehmens ist vor allem an der substanziellen Frage interessiert, bei welcher Produktionsmenge der Gewinn maximal ist.
Ermittle hierfür über verschiedene Zugänge eine Lösung.

d) Rekapituliere die bisherigen Überlegungen vor dem Hintergrund des Begriffs der „Modellbildung“:

Bilden von Modellen in der Mathematik



e) Nimm Stellung zu folgender Aussage, die etwa mit Hilfe des Diagramms aus a) oder anhand des Terms *G(x)* in b) begründet werden kann:
„Das Unternehmen kann bei fester Produktionsmenge x einen beliebig hohen Gewinn erzielen, wenn es nur den Preis pro Bildschirm genügend hoch festsetzt."

f) Wie hoch muss der Preis für einen Bildschirm mindestens sein, damit das Unternehmen überhaupt verlustfrei arbeiten kann?

In Teilaufgabe e) wird deutlich, dass jedes Modell die Realität vereinfacht und damit Grenzen besitzt. Die letzte Aufgabe wendet sich hinsichtlich des Gedankengangs und der mathematischen Realisierung vor allem an leistungsfähigere Schüler, sie führt auf eine Gleichung 3. Grades.

Variieren
Eine bewährte Strategie, um neue (nicht nur) mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, ist es, von Bekanntem auszugehen, dies zu variieren und zu prüfen, ob sich in der veränderten Situation interessante Aspekte ergeben. Im Mathematikunterricht können etwa bekannte Sachverhalte oder herkömmliche Schulbuchaufgaben als Keime für eine Vielfalt von Variationen dienen. Zunächst zwei Beispiele:

Variationen

„Ein Viereck mit vier rechten Winkeln ist ein Rechteck."

Variiere diesen Satz in möglichst vielfältiger Hinsicht und stelle auf diese Weise neue wahre Aussagen auf.

Rechtecke und Zylinder mit Variation

a) Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \boldsymbol{R}$.

b) In die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse werden Rechtecke gezeichnet, die zur y-Achse symmetrisch sind.
Wie hängt der Flächeninhalt dieser Rechtecke von ihrer Form ab?
Welches Rechteck hat die größte Fläche?

c) Wenn die Rechtecke aus b) um die y-Achse rotieren, entstehen Zylinder.
Wie verändert sich das Volumen dieser Zylinder mit ihrer Form?
Welcher Zylinder hat das größte Volumen?

d) Variiere deine Überlegungen aus a) – c), indem du etwa
- eine andere Funktion f wählst
- Dreiecke statt Rechtecke betrachtest
- die Figuren um die x-Achse rotieren lässt
- ...

Gemäß einer „What-if-not-Strategie“ geht es jeweils darum, jeden der tragenden Begriffe einer vorgegebenen Aussage zu variieren. Hier sind mathematische Phantasie und mathematisches Vorwissen gleichermaßen gefragt! Die Ideen sind zu ordnen, zu bewerten und auf ihre Machbarkeit hin zu untersuchen. Manche Variationen werden sich als nicht sinnvoll, falsch oder zu schwierig erweisen. Auf diese Weise ergeben sich selbstgestellte Probleme, die der ursprünglichen Aufgabe entwachsen sind und diese in vielfältige Richtungen weiterführen. Zum Lösen eines solchen Problembündels kann sich arbeitsteiliges Vorgehen anbieten. Einen sinnvollen Abschluss erhält eine Unterrichtseinheit dieser Art allerdings erst dann, wenn die Ergebnisse zusammenfassend dargestellt und gewertet und dabei exemplarisch Strategien mathematischen Arbeitens verdeutlicht werden.
Wenn man ein Problemfeld in dieser Weise von vielen verschiedenen Seiten beleuchtet und durchdringt, vielfältige Bezüge zum eigenen Vorwissen schafft, lernt man sicher mehr an mathematischem Denken und an kreativem Umgang mit Mathematik, als durch Abarbeiten voneinander isolierter, kurzschrittig formulierter Aufgabenstellungen.

Das Thema „Aufgabenvariation im Mathematikunterricht“ ist ein Forschungsschwerpunkt von Prof. Dr. Schupp an der Universität des Saarlandes. Auf dem BLK-Server http://blk.mat.uni-bayreuth.de ist eine Arbeit hierüber zu finden.

Induktives und deduktives Arbeiten
Die Erarbeitung von Neuem im Mathematikunterricht läuft oftmals induktiv oder deduktiv ab. Auf der einen Seite wird in einer Reihe von Beispielen der rote Faden, das zugrunde liegende Prinzip gesucht und daraus ein allgemeiner Zusammenhang abgeleitet. Auf der anderen Seite lernen die Schüler – erstmals im Geometrieunterricht – einen systematisch-deduktiven Aufbau der Mathematik mit Axiomen, Sätzen, Beweisen und Folgerungen kennen.
Es wäre doch schade, wenn die Schüler derartige Lernphasen in ihrer Schullaufbahn zwar Hunderte Mal durchmachen, sie aber nie explizit auf diese grundlegenden Prinzipien der Erkenntnisgewinnung (natürlich nicht nur mathematischer Art) aufmerksam gemacht würden.
Um mathematisches Arbeiten bewusster werden zu lassen, lohnt es sich also, die Schüler mit derartigen Begrifflichkeiten vertraut zu machen. Zwei Beispiele:

Das erste Potenzgesetz

a) Schreibe die folgenden Ausdrücke als Produkte aus Faktoren ohne Exponenten:

$7^2 \cdot 7^4 =$

$5^3 \cdot 5^6 =$

$a^2 \cdot a^3 =$

$x^4 \cdot x^1 =$

$2^m \cdot 2^n =$

$a^m \cdot a^n =$

b) Fasse die obigen Ausdrücke jeweils zu *einer* Potenz mit nur einem einzigen Exponenten zusammen.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den vorgegebenen Termen in a) und dem Ergebnis in b)?
Formuliere deine Erkenntnisse als allgemeinen Lehrsatz und begründe diesen!

d) Informiere dich über das Begriffspaar „induktive" bzw. „deduktive" Erkenntnisgewinnung und berichte deinen Mitschülern darüber.

e) Rekapituliere dein Vorgehen, wie du diesen Lehrsatz, das erste Potenzgesetz, erhalten hast, vor dem Hintergrund der Begriffe „induktiv" bzw. „deduktiv".

Kennen die Schüler den Sinus im rechtwinkligen Dreieck, so können sie den allgemeinen Sinussatz leicht deduktiv herleiten:

Der Sinussatz

a) Zeichne ein beliebiges Dreieck *ABC* und zeichne die Höhe h_c ein.

b) Drücke $\sin \boldsymbol{a}$ und $\sin \boldsymbol{b}$ mit Hilfe der gezeichneten Strecken aus!

c) Drücke $\dfrac{\sin \boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{b}}$ mit Hilfe der Dreiecksseiten aus!
Als Ergebnis erhältst du den Sinussatz:

$$\frac{\sin \boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{b}} = \frac{\quad}{\quad}$$

Formuliere ihn in Worten!

d) Begründe ein entsprechendes Resultat für die Winkel $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{g}$ bzw. für $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{g}$!

e) Informiere dich über das Begriffspaar „induktive“ bzw. „deduktive“ Erkenntnisgewinnung und berichte deinen Mitschülern darüber.

f) Rekapituliere dein Vorgehen, wie du den Sinussatz gewonnen hast, vor dem Hintergrund der Begriffe „induktiv“ bzw. „deduktiv“.

Klassifizieren und Begriffe bilden

Es ist eine fundamentale mathematische Tätigkeit, Objekte hinsichtlich bestimmter Eigenschaften zu klassifizieren und für diese Eigenschaften Begriffe zu schaffen. Jede mathematische Theorie beruht auf diesem Prinzip. In den Begriffen steckt bereits ein Teil der Theorie.

Dabei ist die Begriffsbildung keinesfalls willkürlich. Damit ein Begriff eine mathematische Tragweite besitzt, muss eine sorgsame Analyse der Objekte, eine eingehende Untersuchung von Beispielen, kurz: intensive mathematische Arbeit vorausgehen.

In der Schule werden die Schüler ständig mit neuen Begriffen konfrontiert, die sie als mathematische Vokabeln zu lernen und – verbunden mit den Inhalten – anzuwenden haben. Es wäre schade, wenn sich der Mathematikunterricht darauf beschränken würde, die im Lehrplan aufgeführten Begriffe immer nur zielgerichtet zu definieren und zu verwenden, wenn aber die vor der Begriffsbildung stehenden Prozesse stets unterschlagen würden. Schließlich sind die „fertigen“ Begriffe im Zuge der jahrtausendelangen Entwicklung der Mathematik Endprodukte eines teils mühsamen Schaffens, das eng mit dem Leben und Denken von Menschen verbunden ist, man denke nur an die Begriffe „reelle Zahl“, „komplexe Zahl“, „Funktion“ oder „Ableitung“.

Das Klassifizieren von Objekten und Bilden von Begriffen hilft aber nicht nur, Mathematik als lebendige Wissenschaft erfahrbar zu machen, sondern bietet auch einen idealen Rahmen für eigenständiges mathematisches Forschen und Schaffen, für Kreativität und Phantasie (vgl. hierzu [Vollrath, 1987] sowie die in 2.5 erwähnte Arbeit von M. Ludwig).

Natürlich wird sich die Begriffsbildung durch Schüler vor allem auf einfach strukturierte Begriffe beschränken müssen. Hier zunächst ein Beispiel, mit dem Fünftklässer selbst entdecken können, dass es unter den natürlichen Zahlen einige mit einer strukturellen Besonderheit gibt. (Es erscheint mir nicht allzu problematisch, wenn die Schüler anfänglich statt „Primzahl" einen individuell geschaffenen Begriff verwenden, der für sie das als wesentlich Erkannte ausdrückt.)

Besondere natürliche Zahlen

a) Schreibe die folgenden Zahlen als Produkte mit möglichst vielen Faktoren.
(Die Zahl 1 soll bei den Faktoren nicht vorkommen. Warum eigentlich?)

Beispiel: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

10 =
20 =
18 =
25 =
28 =
60 =
72 =
13 =
92 =
143 =
37 =
68 =

b) Durch welche gemeinsame Eigenschaft können die Faktoren in den gewonnenen Produkten charakterisiert werden?

Erfinde einen Namen für Zahlen mit dieser Eigenschaft und schreibe alle derartigen Zahlen zwischen 1 und 100 auf!

Am Beginn der „Dreieckslehre" in der Unterstufe kann der folgende Arbeitsauftrag stehen. Wenn man alle diesbezüglichen Überlegungen und Ergebnisse in einer Klasse zusammenträgt, wird man einen reichhaltigen Schatz an Begrifflichkeiten und Klassifizierungen gewinnen.

Ordnung im Zoo der Dreiecke

a) Überlege dir eine Eigenschaft, die Dreiecke haben können oder auch nicht haben können.

b) Erfinde einen Namen für Dreiecke mit dieser Eigenschaft und zeichne dazu einige Beispiele.

c) Erkläre genau, was du mit dem Namen beschreibst.

d) Wiederhole deine Tätigkeiten aus a) – c) für andere Eigenschaften von Dreiecken und stelle deine Ergebnisse in einer Übersicht dar.
Gibt es Beziehungen zwischen deinen Begriffen?

Kooperation mit anderen Fachdisziplinen

Die Beziehungen von Seiten der Mathematik zu anderen Fächern sind vielfältig. Nur dann kann Mathematik von Schülern als wertvoller Teil einer modernen Allgemeinbildung erfahren werden, wenn die Schüler – zumindest in Ansätzen – sehen können, welche Rolle die Mathematik im Geflecht der Wissenschaften besitzt. Die Bezüge existieren dabei nicht nur zum Standardbeispiel Physik, sondern auch etwa zur Biologie, Chemie, Geographie, Musik, Kunst oder den Wirtschaftswissenschaften.
Unter fächerübergreifendem Unterricht stellt man sich gerne ein Projekt vor, bei dem in Kooperation verschiedener Fächer ein Problem von verschiedenen Perspektiven aus bearbeitet wird. Dies ist am Gymnasium aufgrund des Fachlehrerprinzips allerdings organisatorisch aufwendig und wird in der Unterrichtspraxis eher selten stattfinden.
Nicht weniger erfolgversprechend erscheint der Weg, im Mathematikunterricht selbst fachübergreifende Fragestellungen zu entwickeln, also Problemstellungen, die auf Wissen aus anderen Fächern zurückgreifen und gleichzeitig die Leistungsfähigkeit wie auch die Grenzen der Mathematik sichtbar machen.

Hier ein Beispiel für die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Chemie (in erster Linie für die Oberstufe, die Teile a), b) und g) lassen sich aber auch in der Mittelstufe bei der Untersuchung exponentieller Zusammenhänge nutzen) :

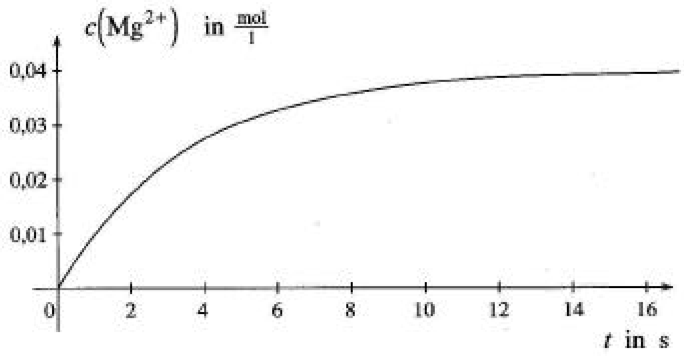
Geschwindigkeit chemischer Reaktionen

Chemische Reaktionen können unterschiedlich schnell verlaufen. Suche Beispiele für chemische Prozesse, die sehr schnell bzw. sehr langsam ablaufen.

Bringt man ein Stück elementares Magnesium in verdünnte Salzsäure, so entstehen dabei Wasserstoff und Magnesiumionen:

$$Mg + 2\,HCl \rightarrow H_2 + Mg^{2+} + 2\,Cl^-$$

Die Konzentration c der Mg^{2+}- Ionen ist das Verhältnis aus der Stoffmenge $n(Mg^{2+})$ und dem Volumen V der Lösung.
Ein Chemiker hat den zeitlichen Verlauf dieser Konzentration gemessen und folgende Messkurve erhalten:



a) Interpretiere diese Kurve!

b) Zur weiteren Auswertung seiner Messungen benötigt der Chemiker einen Funktionsterm, der diesen Graphen beschreibt. Versuche ihm zu helfen!

(Eine Möglichkeit: Du könntest in der Funktionenschar

$$f(t) = a \cdot b^t + c \quad , t \in R_0^+$$

nach einer günstigen Funktion suchen.
Welche Bedeutung besitzen dabei die Parameter $a,b,c \in R$?
Warum ist es sinnvoll, gerade in dieser Schar zu suchen?)

c) Erläutere anhand des Graphen die Begriffe der mittleren Reaktionsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall sowie der momentanen Reaktionsgeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt!

d) Ermittle die Reaktionsgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten 0s, 4s und 8s.

e) Wie hängt die momentane Reaktionsgeschwindigkeit von der Zeit ab?

f) Wie hängt das Volumen des bei der Reaktion während einer Sekunde entstehenden Wasserstoffs von der Zeit ab?

g) Wie verändert sich die obige Kurve, wenn man
- die Konzentration der Salzsäure erhöht
- mehr Magnesium reagieren lässt
- das Magnesium fein zermahlen zur Salzsäure gibt
- die Reaktion bei höherer Temperatur ablaufen lässt?

4. Kommunikationstraining

Es wird vielfach beklagt, dass zahlreiche Schüler nur über unzureichende sprachliche Ausdrucksfähigkeit und mangelnde Gesprächsdisziplin verfügen. Die Klagen beziehen sich etwa auf verbale Passivität, auf Unterrichtsbeiträge in Form wenig durchdachter, zusammenhangsloser Satzfragmente oder auf die mangelnde Fähigkeit der Schüler, sich gegenseitig zuzuhören und aufeinander einzugehen. Nun hilft lamentieren gewiss nicht weiter. Es ist vielmehr geboten, darüber nachzudenken, wie derartige Defizite zustande kommen und wie sie wirkungsvoll abgebaut werden können.
Es scheint mir vor allem folgender Effekte für die beklagten Defizite verantwortlich zu sein: Ein Unterricht, in dem der Lehrer den Ablauf und die Struktur weitgehend vorgibt und dabei den Großteil aller Sprechanteile selbst übernimmt, erlaubt zurückhaltenden, unsicheren Schülern, sich zurückzuziehen und das Unterrichtsgeschehen passiv zu verfolgen. Der Lehrer und die Aktivisten in der Klasse sorgen schon dafür, dass jede Stunde ein „Erfolg" wird. Durch derartige Passivität verkümmern einerseits die bei Fünftklässern noch vorhandene Freude am eigenen Unterrichtsbeitrag und der notwendige Mut dazu.
Andererseits vergeben die Schüler aber auch Stunde für Stunde Chancen, neue Gesprächskompetenzen aufzubauen. Sprechen lernt man eben nur, indem man selbst spricht. Wo sollen die Schüler denn ein elaboriertes Sprachniveau, wie es die Auseinandersetzung mit den schulischen Fachdisziplinen und den behandelten Thematiken erfordert, sonst erwerben, wenn nicht in der Schule? Natürlich besitzen das Elternhaus und die Familie bei der Sprachentwicklung eine fundamentale Bedeutung. Aber für das Sprechen in und vor einer größeren Gruppe, das Sprechen über abstrakte Themen, die nicht dem unmittelbaren Erfahrungsfeld entstammen und die Einführung in zahlreiche Fachsprachen ist doch die Schule der maßgebliche Ort.
Dass sich diesbezügliche Anstrengungen lohnen, ist wohl unstrittig. Schließlich sind kommunikative Kompetenzen nicht nur für die Schule von Bedeutung. Sie sind entscheidend für die Entwicklung von Selbstbewusstsein und Selbstvertrauen sowie grundlegende Voraussetzungen für angemessene Partizipation in der Gesellschaft und nicht zuletzt für beruflichen Erfolg.

4.1 Nachdenken über Kommunikation

Wenn man als Lehrer feststellt, dass es in einer Klasse an kommunikativen Kompetenzen massiv hapert, erscheint es lohnenswert, derartige Missstände explizit zu thematisieren. Im Klassenplenum ist das alltägliche Gesprächsverhalten zu analysieren und in kritisch-konstruktiver Weise zu überdenken.
Dazu kann der folgende Fragebogen (der auf eine Idee in [Klippert 1996b, S.57ff] zurückgeht) als Einstiegshilfe dienen. Ziel soll zunächst sein, bei den Schülern ein Problembewusstsein in Sachen Kommunikation zu schaffen, sie hierfür zu sensibilisieren und sie gleichzeitig erkennen zu lassen, dass es sich lohnt, ihre Kommunikationskompetenz weiterzuentwickeln.

Fragebogen

Dieser Fragebogen soll uns helfen, das Gesprächsverhalten in unserer Klasse zu untersuchen und zu verbessern.

1) Kreuze an, ob dir die folgenden Dinge eher schwer oder eher leicht fallen.

	eher schwer	*eher leicht*
Bei Unterrichtsgesprächen aktiv mitmachen.		
An der Tafel etwas erläutern.		
Einen kleinen Vortrag halten.		
Meine Gedanken verständlich ausdrücken.		
Anderen aufmerksam zuhören.		
Auf Beiträge anderer eingehen.		
Andere von meiner Meinung überzeugen.		
Im Gespräch fair und sachlich bleiben.		
Ein Gespräch leiten.		
Mathematische Ausdrücke verwenden.		
Die Sprache des Mathematiklehrers verstehen.		

2) Mich stört bei den Gesprächen im Unterricht:

3) Das sollten wir bei den Gesprächen im Unterricht besser machen:

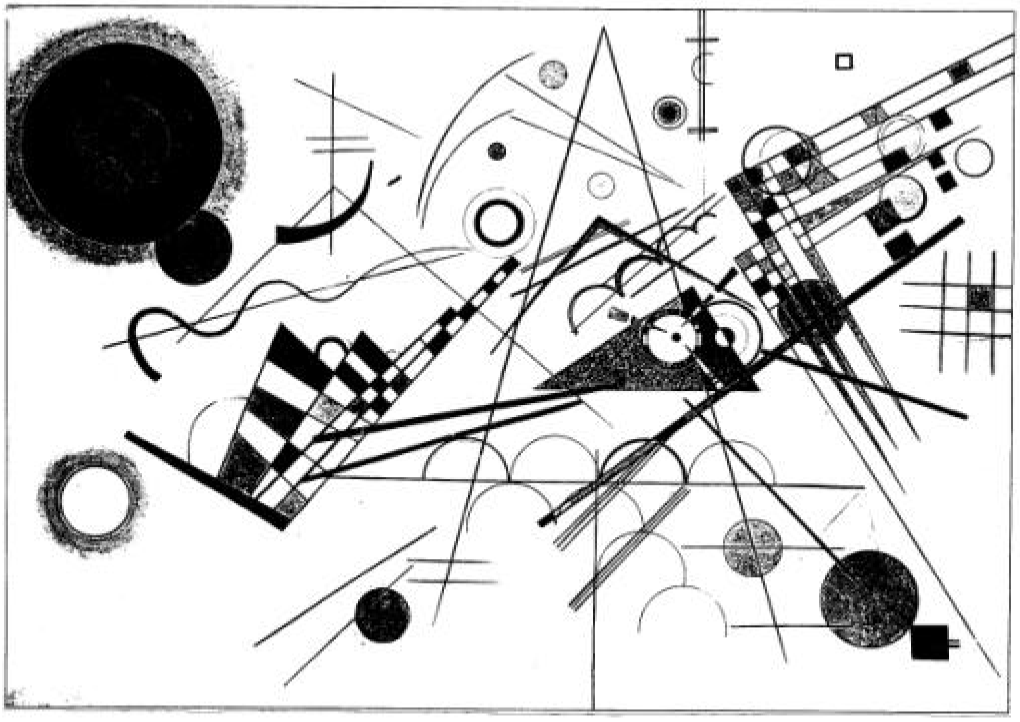
Eine derartige Auseinandersetzung mit dem alltäglichen Kommunizieren ist allerdings nur dann gewinnbringend, wenn sie auch zu einem allgemein akzeptierten Programm führt, wie die erkannten Probleme anzupacken sind.
Liegt es etwa in der Klasse mit der Kommunikationsdisziplin im Argen, können gemeinschaftlich Kommunikationsregeln entwickelt und im Klassenraum visualisiert werden.
Liegen die Defizite im Bereich des korrekten und sicheren Umgangs mit der mathematischen Fachsprache, kann es für die Schüler sinnvoll sein, ein mathematisches Vokabelheft anzulegen und in dieses jeweils bei Unsicherheiten einen erklärenden Eintrag zu machen.
Gehen Kommunikationsängste auf individuelle Persönlichkeitsstrukturen oder das soziale Gefüge in der Klasse zurück, so liegt das Problem tiefer und ist nur in kleinen Schritten abzubauen. Hierzu können die folgenden Aspekte beispielhaft dienen; es bedarf aber begleitend einer gezielten Teamentwicklung im Klassenverband (siehe 5.) und einer gemeinschaftlichen Aktion mehrerer in der Klasse unterrichtenden Lehrkräfte.

4.2 Förderung des freien Sprechens

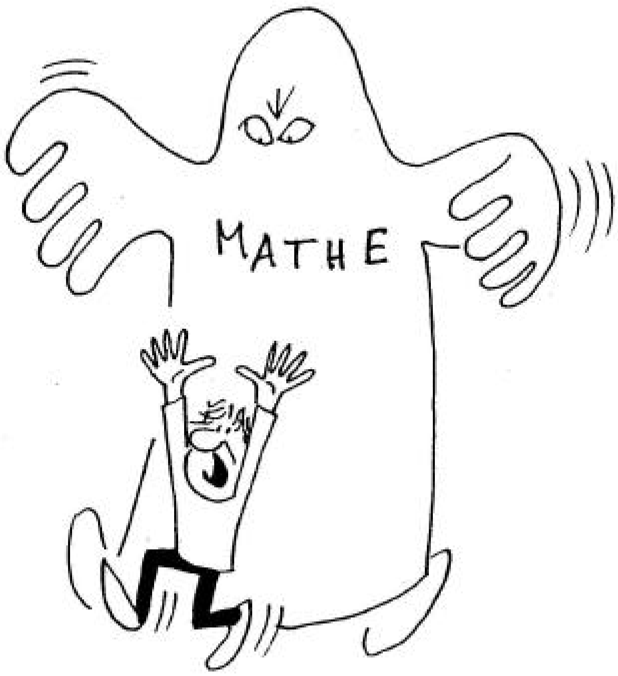
Viele Schüler, die nicht gerne im Klassenplenum sprechen, haben in erster Linie Angst vor dem Scheitern, sie ziehen sich daher zurück und schweigen lieber. Sie befürchten, sich vor dem Lehrer und den Mitschülern zu blamieren, oder fürchten deren Kritik.
Um derartige Ängste abzubauen, ist es einerseits notwendig, in der Klasse ein Gemeinschaftsgefühl und ein Gefühl des gegenseitigen Vertrauens aufzubauen (vgl. Abschnitt 5 über Teamentwicklung). Andererseits ist es aber auch geboten, im Rahmen des Unterrichtsverlaufs regelmäßig Situationen zu schaffen, die die Schüler gezielt zu Erfolgserlebnissen beim freien Sprechen führen.

Impulsbild
Gerade wenn Schüler Angst vor freiem Sprechen haben, kann ein Bild das ideale Medium sein, um verbale Äußerungen zu provozieren. Das Sammeln von persönlichen Assoziationen und subjektiven Äußerungen zu einem vorgegebenen Bild bietet einen geeigneten Rahmen, um auch Schweiger zum sprechen zu bringen.

Beispielsweise bietet sich folgendes Werk von Kandinsky an, um über ebene geometrische Figuren zu sprechen:



Will man die Bedeutung der Mathematik für den Einzelnen und eventuelle Ängste vor diesem Fach thematisieren, kann sich folgendes Bild als Ausgangspunkt anbieten: (Die Idee hierzu geht auf [Klippert 1996a, S.51] zurück.)



Ein Bild eines (achsen- oder punkt-) symmetrischen Objekts kann als Einstieg in eine diesbezügliche Unterrichtssequenz dienen.
Es geht jeweils darum, persönliche Empfindungen, Gedanken und Meinungen zu äußern. Hierbei gibt es kein „richtig“ oder „falsch“. Die Gefahr des Scheiterns beim Spre-

chen bleibt für die Schüler somit gering. Derartige Sprecherfolge geben aber wiederum ein Gefühl der Selbstsicherheit und damit das nötige Selbstbewusstsein, um sich auch in anderen Situationen zu Wort zu melden.

„Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte." Unter diesem Titel ist auf dem BLK-Server *http://blk.mat.uni-bayreuth.de* ein Artikel von Prof. W. Herget abgelegt, der eindrucksvoll demonstriert, wie Bilder aus dem Alltag einen Ausgangspunkt für tiefgründiges mathematisches Denken und Arbeiten bieten können.

Begriffsassoziationen

Zum Einstieg in ein neues Stoffgebiet oder auch um ein wiederholendes Gespräch anzubahnen, bietet es sich an, mit der Klasse Assoziationen zu einem vorgegebenen Begriff oder einer bestimmten Thematik zu sammeln. Hier einige Beispiele:

> Zum Wort *„Kugel"* fällt mir ein ...
>
> Bei *„Symmetrie"* denke ich an ...
>
> Zum Thema *„Dreieck"* weiß ich, dass ...
>
> Zum Begriff *„Funktion"* kann ich sagen, dass ...

Es geht inhaltlich um themenzentrierte Reflexion und darum, das Vorwissen zu mobilisieren und spontane Einfälle zu verbalisieren. Gleichzeitig können die Schüler aber auch ohne große Gefahren des Versagens in freier Rede (und ganzen Sätzen!) das formulieren, was ihnen gerade einfällt.

Hausaufgabenfolie

Eine Möglichkeit, die Schüler regelmäßig zu freiem Sprechen vor der Klasse zu bringen, ist es, jeweils einen Schüler die Hausaufgaben auf Overheadfolie bearbeiten zu lassen. Dieser stellt in der Folgestunde seine Ergebnisse kurz vor und moderiert gleichzeitig die Besprechung der Aufgaben.

Die Vorteile dieser Art der Hausaufgabenverbesserung liegen auf der Hand: In einem festen Ritual steht reihum jeder Schüler regelmäßig vor der Klasse und trainiert freies Sprechen über Mathematik. Dadurch werden Ängste und Scheu abgebaut, es wachsen Selbstbewusstsein und Selbstsicherheit beim Sprechen.

Natürlich muss man sich auch möglicher Probleme bewusst sein: Nicht alle Aufgaben werden immer vollständig und richtig gelöst werden. Hier kommt es auf eine produktiv-konstruktive Gesprächsatmosphäre an, die es erlaubt, aus den Fehlern zu lernen und zu einer korrekten Lösung zu kommen, ohne den referierenden Schüler bloßzustellen.

Zudem wird man nicht davon ausgehen können, dass die Hausaufgabenfolien hinsichtlich der Präsentation, der Verständlichkeit und Lesbarkeit stets perfekt sind. Dies muss

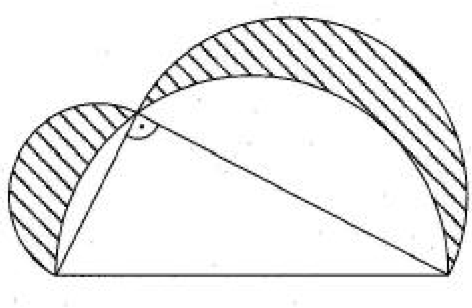
aber nicht unbedingt ein Manko sein. Schließlich müssen die Schüler das Darstellen mathematischer Inhalte erst lernen. Wie soll denn dieses Lernen vonstatten gehen, wenn nicht an konkreten Beispielen?
Wenn derartige Aspekte jeweils rücksichtsvoll thematisiert werden, z.B. durch die jedes Mal automatisch gestellte Routinefrage „Was war gut, was hätte man besser machen können?“, wird Kritik nicht verletzend wirken, sondern helfen, Präsentations- und Visualisierungsfertigkeiten bei allen Schülern kontinuierlich zu steigern.

Kurzbericht, Referate

In den in diesem Artikel vorgestellten Aufgaben findet sich immer wieder der Zusatz „... und berichte deinen Mitschülern darüber.“ Kurzberichte und Referate bieten sich im Mathematikunterricht vor allem an, wenn Schüler oder Schülergruppen Themen eigenständig erarbeiten. Wenn sie dabei das Ziel und die Aufgabe vor Augen haben, ihre Ergebnisse in der Klassengemeinschaft zu präsentieren, wirkt dies nicht nur motivierend, sondern zwingt sie auch dazu, ihre Resultate sprachlich adäquat darzustellen und sie in eine wohlüberlegte Form zu bringen. Gleichzeitig eröffnet sich eine Möglichkeit, dass ihre Arbeit angemessen gewürdigt werden kann.
Hierzu noch ein Beispiel, das nicht unbedingt von allen Schülern einer Klasse bearbeitet werden muss, sondern als Arbeitsauftrag an eine Schülergruppe übertragen werden kann.

Möndchen des Hippokrates

1) Vergleiche den gesamten Flächeninhalt der beiden schraffierten Monde mit dem Inhalt des Dreiecks!
   Stelle deine Überlegungen übersichtlich dar und präsentiere sie deinen Mitschülern.



2) Informiere dich über *Hippokrates* und berichte in der Klasse darüber.
   Was versteht man unter dem „Hippokratischen Eid“?

4.3 Förderung gemeinschaftlichen Kommunizierens

Mindestens ebenso bedeutsam wie freies Sprechen ist das gemeinschaftliche Kommunizieren in einer Gruppe. Im Gespräch anderen zuzuhören, auf andere einzugehen, fair und rücksichtsvoll zu argumentieren, eigene Meinungen überzeugend darzustellen und diskrepante Ansichten zu akzeptieren, dies alles sind Kompetenzen, die Schüler in der Schule lernen müssen, über die sie nicht automatisch verfügen.
Das A und O hierfür ist eine Atmosphäre in der Klasse, die von Verständnis, Toleranz und gegenseitiger Rücksichtnahme geprägt ist (siehe Abschnitt 5), wie auch ein Unterricht, der regelmäßig Freiräume und Anlässe bietet, um gemeinsam ins Gespräch zu kommen.

Offenheit im Unterrichtsgespräch
Ein Unterricht, der vom Lehrer stark strukturiert und kleinschrittig geführt wird, in dem sich die Schülerbeiträge darauf beschränken, in den vorgegebenen Gedankenzusammenhang passende Worte einzufügen, läuft dem Ziel der Kommunikationsentwicklung natürlich entgegen.
Fragen müssen auch echte Fragen sein, die zum Nachdenken, Argumentieren und Diskutieren einladen. Probleme müssen echte Probleme sein, die gemeinsamen Gedankenaustausch und kooperatives Problemlösen erfordern. Die Schüler sollten das Gefühl gewinnen, dass es die Sache, die Mathematik, erfordert, gemeinsam darüber zu sprechen, und sie sollten die Erfahrung machen, dass gemeinschaftliches Kommunizieren nicht nur effektiv zu Ergebnissen führt, sondern auch Spaß macht.
Dabei ist es auch eine Aufgabe der Lehrkraft, unermüdlich darauf zu achten, dass das Gespräch nicht (nur) auf den Lehrer hin fixiert ist, sondern dass die Schüler *miteinander* reden.
Offenheit im Unterrichtsgespräch bezieht sich also sowohl auf den formalen Ablauf als auch auf den Inhalt, denn die Ideen, die Schüler beisteuern, sind oft ausgesprochen einfallsreich und kreativ, wenn man sie nur lässt.
Viele der in diesem Artikel vorgestellten Aufgaben sind so angelegt, dass sie Meinungsaustausch und gemeinschaftliches Kommunizieren nicht nur zulassen, sondern geradezu erfordern.

Aufgaben mit vielfältigen Zugangsweisen
Schüler sind oftmals gewohnt, bei Problemstellungen im Mathematikunterricht genau die Lösungsverfahren einzusetzen, die sich aus der aktuell behandelten Unterrichtssequenz ergeben. Sie scheuen sich, über Lösungsvarianten nachzudenken oder nach evtl. einfacheren Strategien zu suchen. Dabei muss fairerweise bemerkt werden, dass die Aufgabenstellungen, mit denen sich die Schüler (auch in Leistungserhebungen) in der Regel konfrontiert sehen, solch ein Verhalten eher fördern bzw. sogar hervorrufen.
Dem können Aufgaben entgegenwirken, deren Formulierung keinen speziellen Lösungsweg andeutet, die aber eine Vielfalt methodischer Zugangsweisen zulassen. Die gemeinschaftliche Kommunikation ist hier in zweierlei Situationen notwendig. Einerseits müssen die Schüler – etwa in Arbeitsgruppen – nach Lösungsstrategien suchen, diese diskutieren, ausprobieren, durchführen oder evtl. verwerfen. Andererseits bietet es

sich an, nach einer Bearbeitungs- und Lösungsphase die verschiedenartigen Strategien und Wege im Klassenplenum wertend zu vergleichen.
Jeweils stehen die Schüler vor der Notwendigkeit, kooperativ mathematische Inhalt zu besprechen. Dass sie hierbei nicht nur das Kommunizieren üben, sondern gleichzeitig vielfältige Bezüge innerhalb ihres eigenen mathematischen Wissens schaffen, ist wohl unstrittig.

Hier ein Beispiel, das Zugänge auf sehr unterschiedlichen Niveaus zulässt:

Rechtecke

Betrachte Rechtecke mit festem Umfang (z.B. $U = 18$ cm).
Wie hängt der Flächeninhalt dieser Rechtecke von deren Form ab?
Diskutiere hierüber mit deinen Nachbarn und stelle deine Überlegungen und Ergebnisse übersichtlich dar!

Anmerkung: Diese Aufgabe eignet sich natürlich auch ausgezeichnet zum Variieren. Statt Rechtecken kann man Dreiecke, Parallelogramme, n-Ecke, Quader, Pyramiden, ... betrachten. Es ist jeweils zu prüfen, welche weitere Größe sinnvollerweise konstant gehalten werden soll.

Ein Beispiel zur Kreisfläche:

Kreisfläche

Welchen Flächeninhalt besitzt ein Kreis mit dem Durchmesser 10 cm?
Überlege dir mit deinen Nachbarn vielfältige Wege zur Lösung dieses Problems und vergleiche sie!

Natürlich ist diese Aufgabenstellung nur sinnvoll, wenn die Schüler die Formel $A = r^2\pi$ noch nicht kennen. Man könnte etwa Kreise auf kariertes Papier (auch Millimeterpapier) zeichnen und Kästchen systematisch zählen, Kreise aus Holz aussägen und wiegen, Quadrate oder Vielecke ein- und umbeschreiben und Mittelwerte bilden, etc.

Hier noch ein Beispiel für die 11. Jahrgangsstufe:

Ungleichung von Bernoulli

1) Zeige, dass für alle $x \in \,]-1; \infty[$ gilt:
   a) $(1+x)^2 \geq 1+2x$
   b) $\dfrac{1}{1+x} \geq 1-x$
   c) $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{1}{2}x$
   Versuche, jeweils möglichst verschiedenartige Lösungswege zu finden.

2) Beweise die Ungleichung von Jakob Bernoulli:
   Für $n \in \mathbf{N}$ und $x \in [-1; \infty[$ gilt:
   $(1+x)^n \geq 1+nx.$

3) Informiere dich über Jakob Bernoulli sowie über weitere berühmt gewordene Persönlichkeiten aus seiner Familie!

4) Verallgemeinere die Resultate aus 1) und 2) zu einer Aussage für beliebige reelle Exponenten und beweise diese!

Meinungsmarkt

Es lohnt sich durchaus, neben mathematischen Inhalten mit den Schülern auch Fragen zu diskutieren wie:

- Warum eigentlich Mathematikunterricht?
- Mathe bis zur 7. Klasse genügt!
- Kann Mathe Spaß machen?
- Was sollte man am Mathematikunterricht ändern?

Abgesehen davon, dass sich hieraus heiße Diskussionen in einer Klasse entwickeln können, die kommunikative Kompetenzen schulen, führen derartige Auseinandersetzungen mit dem Fach Mathematik zu einem Hinterfragen und kritischer Reflexion des eigenen Tuns – auf anderer Ebene als dies normalerweise üblich ist. Es ist zu hoffen, dass derartige Diskussionen für Schüler wie Lehrer fruchtbar sind.

Knobelaufgaben

Ich habe die Erfahrung gemacht, dass gelegentlich in den Unterricht eingestreute Knobelaufgaben, die – sicher nicht alle, aber doch einige – Schüler „packen“, zu einer besonders intensiven mathematischen Kommunikation unter den Schülern führen. Aufgaben, die ein interessantes Problem aufwerfen, in ihrer Formulierung einfach sind, sich aber gegen einen direkten Zugang zunächst sträuben, können dazu führen, dass Schüler in den Pausen, in Zwischenstunden oder auf dem Schulweg über Mathematik sprechen, Gedanken austauschen und Lösungsideen diskutieren.

Ein Beispiel für die 10. Jahrgangsstufe:

Methan

Wie groß ist der Bindungswinkel im Methanmolekül?

Der Wert $j = 109^{o}\ 28'$ steht in jedem Chemiebuch für die 10. Jahrgangsstufe. Die Schüler lernen diesen Wert im Chemieunterricht. Seine genaue Berechnung ($\cos j = -\frac{1}{3}$) bedarf allerdings der mathematischen Modellierung und einiger geometrischer und trigonometrischer Überlegungen.

In der Unterstufe können kombinatorische Probleme reizvolle Herausforderungen bieten und das logische Denken der Schüler in besonderer Weise schulen:

Knobelaufgaben der Woche

1) Bei einer Party treffen sich 20 Personen. Jeder gibt jedem zur Begrüßung die Hand. Wie viele Händedrücke finden statt?

2) Eine Firma hat 3 verschiedene Autos und 7 Garagenplätze. Auf wie viele Arten können die Autos parken?

Schließlich bilden die Probleme aus den Mathematikwettbewerben (Bundeswettbewerb, Mathematikolympiade, regionale Wettbewerbe, ...) einen reichen Schatz an Aufgaben, die Kreativität und problemlösendes Denken fördern. Ein (willkürlich gewähltes) Beispiel aus dem BWM 1988:

Gleichseitige Dreiecke

Beweise: Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn die Summe der Höhen neunmal so groß wie der Inkreisradius ist.

Derartige Knobelaufgaben schaffen nicht nur Kommunikationsfelder, sie sind auch ein Weg, um besonders interessierte und leistungsstarke Schüler mit einem breiten Anforderungsspektrum anzusprechen und sie mathematisch adäquat zu fördern.

5. Teamentwicklung

Die bisher dargestellten Ansätze zur Pädagogischen Schulentwicklung sind ohne eine konsequente Förderung und Pflege der Teamarbeit im Klassenverband nicht realisierbar.
Es ist falsch und gefährlich zugleich, anzunehmen, dass Teamkompetenz und die Fähigkeit zu fachbezogener Kooperation auf Schülerseite automatisch vorhanden sind bzw. sich von selbst einstellen. Oftmals führt diese Annahme zum Scheitern von Teamarbeit. Deshalb ist es vielmehr geboten, die nötigen Kompetenzen im Unterricht bewusst zu thematisieren, gezielt einzuüben und konsequent zu festigen.
Zum Sprachgebrauch: In diesem Artikel werden mit „Teamarbeit“ alle Formen des kooperativen Arbeitens auf Schülerseite bezeichnet, also sowohl Partner- und Gruppenarbeit wie auch die Kooperation im Klassenverband.

5.1 Warum Teamarbeit?

Teamarbeit wird von vielen Seiten als wertvoller Bestandteil eines methodisch ausgewogenen Unterrichts hervorgehoben. Dabei kristallisieren sich folgende Begründungsfelder für eine konsequente Teamentwicklung im Klassenverband heraus:

- **fachliches Lernen**: Die Auseinandersetzung mit fachbezogenen Aufgaben in einer angstfreien Gruppenatmosphäre und der intensive Austausch mit anderen Teammitgliedern begünstigen fachliches Lernen in zweierlei Hinsicht: Einerseits zwingt das aktive Lernen und Kommunizieren die Schüler zu einer eigenständigen Erarbeitung und Durchdringung des Stoffes. Andererseits kann die Gruppe als helfende Instanz wirken, wenn es darum geht, Verständnisfehler zu klären, Grundlagenwissen zu aktivieren, Lösungsideen zu entwickeln und auftretende Probleme zu beseitigen. Voraussetzung hierfür ist natürlich, dass in der Gruppe die Kooperation funktioniert und die Arbeitsdisziplin stimmt.

- **soziales Lernen**: Kooperative Arbeitsformen unterstützen den Aufbau sozialer Kompetenzen, indem sie die Schüler dazu veranlassen zusammenzuarbeiten, sich gegenseitig zu helfen und zu unterstützen, miteinander zu diskutieren, mit diskrepanten Ansichten umzugehen und sich wechselseitig zu kontrollieren.

- **Lernmotivation**: Kooperation macht das Arbeiten nicht nur lebendig, kurzweilig und abwechslungsreich, sondern schafft auch die Grundlage für das Gefühl, in eine Gemeinschaft einbezogen zu sein, die an inhaltlichen Problemstellungen arbeitet und für deren Erfolg man mitverantwortlich ist.

- **Grundlage für EVA**: Die Erziehung zu eigenverantwortlichem, selbstorganisiertem Arbeiten ist letztendlich zum Scheitern verurteilt, wenn die Schüler nicht gleichzeitig lernen, kooperativ zusammenzuarbeiten. Wenn sich der Lehrer von seiner dominierenden, zentralen Rolle zurückzieht, darf sich der einzelne Schüler nicht alleine gelassen fühlen. Vielmehr sollen die Freiräume dazu führen, dass die Schüler ihr Lernen und Arbeiten *gemeinsam* in die Hand nehmen.

- **berufsrelevante Schlüsselqualifikationen**: In Stellenausschreibungen zählt „Teamfähigkeit" zu den am häufigsten gebrauchten Begriffen. Groß- und Mittelbetriebe setzen angesichts immer komplexer werdender Produktionsprozesse auf flexibel formierbare, selbstbestimmt und eigenverantwortlich operierende Teams. Dadurch sind Team- und Kommunikationsfähigkeit für Personalchefs Top-Kriterien bei der Auswahl junger Bewerber.

- **Entlastung für Lehrkräfte**: Ziel der Teamentwicklung ist es, dass sich in einer Klasse bei den Schülern Kompetenzen entwickeln, anstehende Aufgaben und dabei auftretende Probleme ernsthaft und effektiv in eigener Regie kooperativ zu lösen. Dadurch ergeben sich für die Lehrkräfte zwangsläufig Entlastungsperspektiven, da sie dann eben nicht mehr für jeden noch so kleinen Lern- und Arbeitsprozess zuständig und verantwortlich sind.

Damit kein falscher Eindruck entsteht: Teamarbeit ist eine von vielen methodischen Formen des Unterrichts. Lehrerzentrierter, darbietender Unterricht oder Phasen der Still- und Einzelarbeit werden stets ihre Berechtigung behalten. Es geht nur darum, Teamarbeit bewusster und evtl. zu einem höheren Anteil in den alltäglichen Mathematikunterricht zu integrieren, um sie aus ihrem „Kümmerdasein" zu befreien.

5.2 Teamarbeit im Klassenverband

Regelkatalog für Teamarbeit

Jede gesamte Klasse ist ein Team, eine Gruppe, die Tag für Tag teils über mehrere Schuljahre hinweg miteinander auskommen und gemeinsam leben, lernen und arbeiten muss. Dass es dabei auch zu Reibereien und Konflikten kommt, ist nur natürlich. Es kommt darauf an, diese offen anzugehen und wirksam abzubauen, damit keine klasseninternen spaltenden Gräben entstehen.
Hierbei kann es sinnvoll und nützlich sein, ein gemeinsames Regelwerk zu erarbeiten, das für alle Formen der Zusammenarbeit in der Klasse als verbindlich akzeptiert wird. Selbstverständlich müssen hier möglichst viele in der Klasse unterrichtende Lehrkräfte an einem Strang ziehen – auch der Mathematiklehrer, der mit seinem Stundenmaß relativ großen Einfluss nehmen kann.

Konkret kann das Vorgehen wie folgt aussehen (vgl. Klippert 1998, S. 58f):
Die Schüler befassen sich zunächst in Kleingruppen mit dem Thema:

Unsere Klasse ist ein Team

Gute Teamarbeit verlangt, dass ...

*
*
*
*
*

Im Klassenplenum werden die Gedanken gesammelt und daraus ein allseits anerkannter Regelkatalog entwickelt, der im Klassenraum für jeden sichtbar visualisiert wird. Natürlich bietet solch ein Verhaltenskodex keine Gewähr dafür, dass er immer eingehalten wird. Aber er sensibilisiert die Schüler in puncto Teamverhalten und schafft eine Basis, um bei Störungen gruppenintern auf die vereinbarten Interaktionsregeln hinzuweisen.
Bei der Bildung von Arbeitsgruppen in der Klasse kann es etwa sinnvoll sein, in jeder Gruppe einen Regelbeobachter zu bestimmen, der die Befolgung der vereinbarten Grundsätze überwacht. Dadurch rückt das Teamverhalten stärker ins Bewusstsein und die Chance für produktive und ertragreiche Gruppenarbeit erhöht sich.

Kooperation im Unterrichtsgespräch
Dieser Aspekt hängt eng mit dem Bereich des Kommunikationstrainings (siehe 4.3) zusammen. Soll sich eine Klasse als Team begreifen, ist es eine fundamentale Aufgabe der Lehrkraft, das Unterrichtsgespräch so zu gestalten, dass *miteinander* kommuniziert wird und dass Unterrichtsergebnisse maßgeblich als Produkte eines *gemeinsamen* Schaffens erfahren werden. Damit besitzt jeder einzelne Schüler als Teil dieser Gruppe eine Mitverantwortung für das Gelingen der Arbeit.
Ein Unterricht, der zwar gelegentliche Gruppenarbeitsphasen enthält, aber ansonsten stark auf den Lehrer hin zentriert ist und produktive Wechselwirkungen zwischen den Schülern nicht ausdrücklich fördert, gefährdet eine wirksame Teamentwicklung.
Kooperation im Klassenverband bietet sich in vielen Phasen des Unterrichts an. Insbesondere bei der Erarbeitung von Neuem, bei Problemlöseaufgaben, in Planungsphasen von Projekten (vgl. 2.5) oder beim Brainstorming – etwa im Rahmen des in 3.2 beschriebenen Variierens mathematischer Sachverhalte – zeigt sich, dass kooperativer Gedankenaustausch zu vielfältigen Ideen führen und damit inspirierend und effektiv zugleich sein kann. Die Kreativität der Gruppe erweist sich in der Regel als größer als die eines Einzelnen.

Kooperatives Lernen aus Fehlern
Im Umgang mit Fehlern zeigt sich das Teamverhalten einer Klasse in besonderem Maße. Wenn die Schüler im Mathematikunterricht engagiert sind, dann machen sie natürlich auch Fehler, sie ziehen falsche Schlüsse, gehen Irrwege.
Aus Fehlern kann man lernen. Dies klingt wie eine Binsenweisheit, aber es setzt voraus, dass Fehler erlaubt sind und auch tatsächlich Platz im Unterricht haben. Es setzt aber vor allem voraus, dass Schüler ohne Angst vor schlechten Noten oder Spott und Gelächter von Seiten der Mitschüler sich trauen, Fehler zu äußern.
Hier ist eine konsequente Teamentwicklung im Klassenverband nötig. Fehler und Fehlvorstellungen eines Einzelnen sollten gemeinsam rücksichtsvoll und sensibel so thematisiert und durchleuchtet werden, dass sie für alle Schüler lehrreich sind, ohne den Einzelnen bloßzustellen. Eine solche Fehlerarbeit bedarf natürlich einiger Übung in der Klasse, wenn sie aber zur Routine wird, erweist sie sich als ausgesprochen wirkungsvoll.

5.3 Felder für Partner- und Gruppenarbeit

Aufgabenstellungen, die in Partner- oder Gruppenarbeit erledigt werden sollen, müssen so angelegt sein, dass sie die Zusammenarbeit der Schüler auch sinnvoll und gewinnbringend erscheinen lassen und dass diese durch die Kooperation für ihr Lernen profitieren. Nur so kann kooperatives Arbeiten als wertvolle, einer Problemstellung angemessene Arbeitsform, nicht aber als Selbstzweck, erfahren werden.
Viele der in diesem Artikel vorgestellten Aufgaben eignen sich für Partner- oder Gruppenarbeit. Ihre Formulierung weist teils bereits darauf hin. Insgesamt kristallisieren sich für derartige kooperative Arbeitsformen im Mathematikunterricht die folgenden Tätigkeitsbereiche heraus:

Wechselseitige Beratung und Kontrolle
In Unterrichtsphasen des Übens, Sicherns und Anwendens erscheint eigenständiges Arbeiten der Schüler mit einem Partner oder in Kleingruppen weitaus effizienter als vom Lehrer eng geführter Klassenunterricht.
Ein (scheinbar triviales) Beispiel: Das Festigen eines neuen Inhalts kann durch folgende Aufforderung initiiert werden:

> Bearbeite im Schulbuch auf Seite xx die Aufgaben xxx.
> Berate dich bei Bedarf mit deinen Nachbarn und vergleiche jeweils die Lösungswege und Ergebnisse.

Die Schüler können sich hier wechselseitig beraten und helfen, individuelle Arbeitstempi wählen und sich gleichzeitig so kontrollieren, dass insgesamt die Gefahr des Scheiterns oder vollständig falscher Lösungen gering wird. Diese Organisationsform des Unterrichts erlaubt es, dass sowohl leistungsstarke und schnelle Schüler wie auch

schwächere ihren Kenntnissen und Fertigkeiten entsprechend arbeiten und üben können. (Natürlich müssen die schwächeren Schüler bereits über nötige Kompetenzen verfügen, um der Situation nicht völlig hilflos gegenüberzustehen.)
Die Lehrkraft kann sich in einer derartigen Phase entweder zurückziehen oder sich gezielt Einzelnen zuwenden, um diese individuell zu fördern.

Mathematisch diffizile Aufgaben

Kooperation in Partner- und Gruppenarbeit erweist sich immer als ausgesprochen effektiv, wenn es darum geht, neue Ideen oder ungewohnte Lösungsansätze zu entwickeln. Das gemeinsame Erschließen einer Aufgabenstellung, die Diskussion auftretender Probleme und der gemeinschaftliche Austausch von Gedanken und Gefühlen führen in der Regel zu mehr und zu brauchbareren Ideen als Einzelkämpfertum.
Aber auch für die Mobilisierung von Vorwissen und Grundkenntnissen ist das gedankliche Ping-Pong-Spiel in einer Gruppe ausgesprochen förderlich. Gleichzeitig können die soziale Einbindung und die Eigendynamik der Gruppe den Einzelnen davor bewahren, bei scheinbar unüberwindbaren Problemen vorschnell aufzugeben und zu kapitulieren.

Ein Beispiel zur Konstruktion von Dreiecken:

Dreiecke konstruieren

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den folgenden Daten:

Seite $a = 4{,}5$ cm, Seitenhalbierende $s_c = 4$ cm, Höhe $h_a = 5$ cm

Suche gemeinsam mit deinen Nachbarn nach einer Lösung.

Hier ein Beispiel, das vernetzende Bezüge innerhalb des mathematischen Wissens der Schüler herstellt, vielfältige Zugangsweisen zulässt, viel Freiraum für kooperatives Diskutieren und Arbeiten bietet und ein gegenseitiges Präsentieren der Gruppenergebnisse geradezu herausfordert:

.

Gleichschenklige Dreiecke

1) Zeichne verschiedene Dreiecke mit Schenkeln der Länge $l = 5$ cm.
Wie hängt der Flächeninhalt dieser Dreiecke von ihrer Form ab?
Gibt es ein solches gleichschenkliges Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt? Welche Form hat dieses?
Versuche, diese Aufgabe über verschiedenartige Zugänge zu lösen!

2) Wenn die gleichschenkligen Dreiecke aus 1) jeweils um ihre Symmetrieachse rotieren, so entstehen Kegel. Wie hängt das Volumen dieser Kegel mit ihrer Form zusammen?
Gibt es einen solchen Kegel mit größtmöglichem Volumen? Wie sieht dieser aus?

Kooperative Präsentationen

Einen Höhepunkt besitzen Gruppenarbeitsprozesse immer dann, wenn sie zu einer Präsentation der Gruppenergebnisse führen. Das Ziel, die Resultate nach einer intensiven Arbeitsphase etwa im Klassenplenum vorzustellen, zwingt die Schüler nicht nur zu einer wohlüberlegten, strukturierten und verständlichen Darstellung ihrer Arbeit, sondern wirkt gleichzeitig motivierend und hilft, Durststrecken zu überwinden. Schließlich will man sich ja vor den anderen nicht blamieren.
Hierbei ist es reizvoll und lohnenswert zugleich, wenn die kooperativ erarbeiteten Resultate nicht von einem Einzelnen vorgetragen, sondern gemeinschaftlich präsentiert werden. Dies erscheint hinsichtlich der Arbeitsbelastung der Gruppenmitglieder nur gerecht und erfordert auch bei der Vorbereitung und Ausarbeitung der Ergebnispräsentation intensiven Gedankenaustausch und fruchtbare Zusammenarbeit. Schließlich sollte der Einzelne nicht um das Gefühl betrogen werden, für das Gruppenergebnis mitverantwortlich zu sein und damit Gruppenerfolge auch als persönliche Erfolge verbuchen zu dürfen.
Alle bislang dargestellten Lernsituationen für Gruppenarbeit eignen sich für eine derartige Ergebnispräsentation. Wie die Gruppenmitglieder die Vorstellung im Einzelnen gestalten und moderieren, ist jeweils gruppenintern zu diskutieren und zu entscheiden.

Umfangreiche Problemstellungen

Gruppenarbeit lässt sich hinsichtlich des inhaltlichen Arbeitens der Schüler differenzieren: Bei der *arbeitsgleichen* Form bearbeiten alle Gruppen die gleiche Situation, bei der *arbeitsverschiedenen* Form befasst sich jede Gruppe mit einer anderen Thematik.
Letzteres ist vor allem dann notwendig und sinnvoll, wenn die zu bearbeitende Problemstellung sehr umfangreich ist. Dann ist Arbeitsteilung angebracht und Gruppenarbeit kann als effiziente und ertragreiche Organisationsform des Schaffens erfahren werden.

Ein Beispiel:

Platonische Körper

Ziel soll sein, in unserer Klasse möglichst effizient ein fundiertes Wissen über die platonischen Körper zu gewinnen und dieses übersichtlich darzustellen.

1) Informiert euch umfassend über die fünf platonischen Körper
   - Tetraeder
   - Hexaeder
   - Oktaeder
   - Dodekaeder
   - Ikosaeder

   und stellt Modelle dieser Körper her.

2) Entwerft eine Übersicht zu den platonischen Körpern.

3) Diese fünf Körper waren bereits den Griechen bekannt und sind nach dem Philosophen Platon benannt. Informiert euch über das Leben Platons und sein Umfeld.

Es bietet sich an, nach einer gemeinsamen Planungsphase sechs bis sieben Arbeitsgruppen zu bilden, die sich mit klar umrissenen Teilaspekten befassen und sich auf ihren Gebieten jeweils zu „Experten“ machen. Die arbeitsteilig gewonnenen Ergebnisse werden anschließend mosaikartig zu einem (sicher eindrucksvollen) Gesamtprodukt zusammengefügt.
Dass hierbei eigenverantwortliches Arbeiten, Methodentraining, intensive Kommunikation und Teamentwicklung gleichzeitig stattfinden, ist wohl unstrittig.

Projekt- und Produktionsaufgaben
Eine Hochform eigenverantwortlicher Gruppenarbeit findet im Rahmen von Unterrichtsprojekten statt, wenn sich die gesamte Klasse einer anspruchsvollen Thematik widmet und diese angesichts ihrer Komplexität arbeitsteilig bearbeitet. Das Vorhaben ist inhaltlich zu strukturieren und für die verschiedenen Tätigkeitsfelder sind Arbeitsgruppen zu bilden, die spezifische themenzentrierte Aufgaben anzugehen haben.
Für ein Gelingen der Projektarbeit ist es dabei unerlässlich, dass nicht nur die gruppeninterne Kooperation funktioniert, sondern dass auch die Zusammenarbeit zwischen den verschiedenen Gruppen klappt. Nur so kann am Ende ein Projektergebnis stehen, in das alle Gruppenresultate harmonisch eingehen.

Eine persönliche Erfahrung: Die einzelnen Gruppen arbeiten während der Realisierungsphase in der Regel sehr auf ihr eigenes Teilgebiet hin fixiert. Sie versuchen „ihren“ Beitrag möglichst gut zu machen, haben dabei allerdings meist noch keine Vorstellung darüber, wie das Gemeinschaftsprodukt am Ende aussehen wird. Umso eindrucksvoller ist es dann für die Schüler, zu erleben, wie die einzelnen Teile zusammengefügt ein umfangreiches Projektergebnis hervorbringen, das ein Einzelner kaum hätte realisieren können.

Ein Beispiel: Wenn die Arbeitsgruppen zu einem Projekt wie etwa „Messen im Gelände“ (vgl. 2.5) ihr Vorgehen und ihre Resultate auf Plakaten darstellen und visualisieren, kann daraus eine Ausstellung für die gesamte Schulgemeinschaft oder eine größere Öffentlichkeit gestaltet werden, die das Schaffen dokumentiert und präsentiert. Das Zusammenfügen kleinerer Elemente zu einem eindrucksvollen Ganzen löst bei vielen Schülern ein Aha-Erlebnis aus:
Die Gruppenarbeit und die Zusammenarbeit im Klassenteam kann als der Problemstellung angemessene Arbeitsform erfahren werden, die es erlaubt, gemeinschaftlich ein Produkt zu schaffen, auf das alle Mitwirkenden stolz sein können.

Ein Schlusswort:
EVA, Methodentraining, Kommunikationstraining und Teamentwicklung sind sicher nicht die einzigen Wege zu einer Pädagogischen Schulentwicklung. Aber es sind Ansätze, die relativ schnell und ohne unangemessen hohen, zusätzlichen Aufwand von Seiten der Lehrer in der konkreten Unterrichtsstunde umgesetzt werden können und die damit einen Weg aufzeigen, wie das Leben und Arbeiten in der Schule für alle Beteiligten ertragreicher gestaltet werden kann.

(Dieser Artikel wird in den nächsten Monaten noch überarbeitet und erweitert. Die jeweils aktuelle Version ist unter http://blk.mat.uni-bayreuth.de bei „Materialien zum Mathematikunterricht“ zu finden. Aktueller Stand: 22.10.2001)

Literatur

P. Baptist (Hrsg.): Mathematikunterricht im Wandel, Bamberg 2000.

P. Baptist u.a.: Geonext, Dynamische Mathematik, Bayreuth 2001.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht, Kultus, Wissenschaft und Kunst (Hrsg.): Wissen und Werte für die Welt von morgen, München 1998.

W. Blum, M. Neubrand (Hrsg): TIMSS und der Mathematikunterricht, Hannover 1998.

Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung: Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts, Bonn 1997.

L. Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra, Nachdruck, Stuttgart 1959.

K. Frey: Die Projektmethode, Weinheim 1998.

L. Flade, W. Herget: Lehren und Lernen nach TIMSS, Berlin 2000.

H. Klippert: Methodentraining, Weinheim Basel 1996.

H. Klippert: Kommunikationstraining, Weinheim Basel 1996.

H. Klippert: Teamentwicklung im Klassenraum, Weinheim Basel 1998.

H. Klippert: Auf dem Weg zu einer neuen Lernkultur, Gütersloh 1999.

H. Klippert: Pädagogische Schulentwicklung, Weinheim Basel 2000.

Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart (Hrsg.): Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik (WUM), Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Heft M 49, Stuttgart 2001.

H. Meyer: Schulpädagogik, Band II, Berlin 1997.

W. Neidhardt, T. Oetterer: GEONET… und die Geometrie lebt!, Bamberg 2000.

H.-G. Rolff u.a.: Manual Schulentwicklung, Handlungskonzept zur pädagogischen Schulentwicklungsberatung, Weinheim Basel 1998.

H.-J. Vollrath: Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht, ZDM 40, Heft 3, 1987, S. 123-127.

L. Wurz: Unterrichtspraktische Überlegungen zu einer geometrischen Figur, Mathematik in der Schule 36, 1998.